คอมบินาทอริกเบื้องต้น

ธนะ วัฒนวารุณ

เอกสารนี้ดัดแปลงจากเอกสาร คอมบินาทอริกเบื้องต้น ของ อาภาพงศ์ จันทร์ทอง

1 การนับ

1.1 กฎการนับพื้นฐาน

หลักการ 1 (ความสัมพันธ์แบบหนึ่งต่อหนึ่งทั่วถึง; Bijection)**.** เราสามารถนับจำนวนสมาชิกของเซต S โดยให้นับสมาชิกของเซต T แทนได้ เมื่อมีฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งทั่วถึง (bijection) จากเซต S ไปยังเซต T (หรือจากเซต T ไปยังเซต S) ■

หลักการ 2 (กฎการบวก; Rule of Sum)**.** กำหนดให้เซต S เป็นเซตจำกัด (finite set) ที่สามารถแบ่งได้เป็นเซต $S_1, S_2, \ldots, S_n$ โดยที่สองเซตใด ๆ ไม่มีสมาชิกร่วมกันเลย แล้ว S จะมีจำนวนสมาชิกเป็น

$$|S| = |S_1| + |S_2| + \ldots + |S_n|$$ ■

หลักการ 3 (กฎการคูณ; Rule of Product)**.** กำหนดให้เซต S เป็นเซตจำกัด ที่ประกอบด้วยสมาชิกที่สร้างได้จากขั้นตอน k ขั้น ขั้นตอนที่ i (สำหรับ $i \in \{1, \ldots, n\}$) มีตัวเลือกที่เป็นไปได้ n_i รูปแบบ โดยที่จำนวนรูปแบบนี้ไม่ขึ้นกับขั้นตอนก่อนหน้า แล้ว S จะมีจำนวนสมาชิกเป็น

$$|S| = n_1 \cdot n_2 \cdot \ldots \cdot n_k$$ ■

คำถาม 4. คุณสมมีเสื้อในตู้เสื้อผ้า 7 ตัว มีกางเกง 5 ตัว มีกระโปรง 6 ตัว และมีหมวก 13 ใบ อยากเท่าว่าหากคุณสมต้องการเลือกเสื้อหนึ่งตัว กางเกงหรือกระโปรงหนึ่งตัว และอาจสวมหมวกหนึ่งใบหรือไม่สวมหมวกก็ได้ คุณสมจะสามารถแต่งตัวได้ทั้งหมดกี่รูปแบบ?

คำถาม 5. บิตสตริง (bit string) ความยาว n ตัว (แต่ละตัวประกอบไปด้วยสัญลักษณ์ 0 หรือ 1) มีทั้งหมดกี่สาย?

คำถาม 6. มีถุงอยู่ทั้งสิ้น 3 ใบซึ่งล้วนบรรจุสิ่งของที่แตกต่างกันทั้งหมด นอกจากนั้นยังทราบว่าถุงแต่ละใบจะมีสิ่งของมากกว่าหนึ่งชิ้น หากเราหยิบสิ่งของจากถุงใบที่หนึ่งและถุงใบที่สองถุงละ 1 ชิ้น จะได้คู่อันดับของสิ่งของที่หยิบออกมาได้ทั้งหมด 78 รูปแบบ แต่ถ้าหากเราหยิบสิ่งของจากถุงใบที่สองและถุงใบที่สามถุงละ 1 ชิ้น จะได้คู่อันดับของสิ่งของที่หยิบออกมาได้ทั้งหมด 143 รูปแบบ แล้วถ้าอยากเราหยิบสิ่งของจากถุงทั้ง 3 ใบถุงละ 1 ชิ้น แล้วจะได้ชุดอันดับของสิ่งของที่หยิบออกมาได้ทั้งหมดกี่รูปแบบ?

1.2 การเรียงสับเปลี่ยน

ทฤษฎีบท 7 (การเรียงสับเปลี่ยน; Permutation)**.** มีวัตถุ n ชิ้นที่แตกต่างกัน เราจะสามารถเลือกวัตถุ k ชิ้น นำมาวางเรียงเป็นลำดับได้ทั้งสิ้น $n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$ รูปแบบ ■

คำถาม 8. มีนักเรียน 24 คนรอเข้าแถวตอนรอตักอาหารอย่างสุภาพชนโดยพร้อมเพรียงกันทุกคน อยากทราบว่าจะมีรูปแบบลำดับการยืนของนักเรียนในแถวทั้งหมดกี่รูปแบบ?

คำถาม 9. มีนักเรียน 24 คนรอเข้าแถวตอนรอตักอาหารอย่างสุภาพชนโดยพร้อมเพรียงกันทุกคน แต่ในระหว่างรออาหารมาวางนั้น อาจารย์ขออาสาสมัครให้นักเรียน 6 คนไปช่วยยกของให้อาจารย์ด้วยการเลือกอย่างสุ่มอย่างเท่าเทียม อยากทราบว่าจะมีรูปแบบลำดับการยืนของนักเรียนที่เหลือภายในแถวจากเดิม 24 คนทั้งหมดกี่รูปแบบ?

คำถาม 10. มีจำนวนเต็มบวก 5 หลัก (ไม่ขึ้นต้นด้วย 0) ทั้งหมดกี่จำนวนที่สอดคล้องกับเงื่อนไขแต่ละข้อต่อไปนี้?

(a) ไม่มีเงื่อนไขเพิ่มเติม

(b) ไม่มีเลขโดดใด ๆ ที่ซ้ำกันเลย

(c) ไม่มีเลขโดดที่อยู่ติดกันคู่ใด ๆ ที่ซ้ำกันเลย

1.3 การจัดกลุ่ม

นิยาม 11. กำหนดให้มีเซต S และ T และฟังก์ชัน $f : S \to T$ แล้ว f จะเป็นความสัมพันธ์แบบ k ต่อหนึ่งอย่างทั่วถึง (k-to-1 correspondence) เมื่อสำหรับสมาชิก $y \in T$ ใด ๆ จะมีสมาชิก $x \in S$ ทั้งสิ้น k ตัวพอดีที่สอดคล้องกับสมการ $f(x) = y$ ■

หลักการ 12 (กฎการหาร; Rule of Division)**.** กำหนดให้ S และ T เป็นเซตจำกัด และมีฟังก์ชัน $f : S \to T$ ที่มีความสัมพันธ์แบบ k ต่อหนึ่งอย่างทั่วถึงแล้วนั้น จะพบว่า $|S| = k \cdot |T|$ ■

ทฤษฎีบท 13 (การจัดกลุ่ม; Combination)**.** มีวัตถุ n ชิ้นที่แตกต่างกัน เราจะสามารถเลือกวัตถุ k ชิ้นได้ทั้งสิ้น

$$\frac{n!}{k!(n-k)!} \quad \text{รูปแบบ} \quad \text{ซึ่งอาจแทนด้วยสัญลักษณ์} \quad \binom{n}{k} \quad \text{ซึ่งอ่านว่า “}n\text{ เลือก }k\text{”}$$

หมายเหตุ สัญลักษณ์ $\binom{n}{k}$ ข้างต้นมีชื่อเรียกว่าสัมประสิทธิ์ทวินาม (Binomial Coefficient) ■

ทฤษฎีบท 14. มีวัตถุ n ชิ้นที่แตกต่างกัน เราจะแบ่งสิ่งของออกให้คนทั้งสิ้น k คน โดยคนที่หนึ่งจะได้ของ n_1 ชิ้น คนที่สองจะได้ของ n_2 ชิ้น ไปเรื่อย ๆ (และกำหนดให้ $n_1 + n_2 + \ldots + n_k = n$)

เราจะแบ่งสิ่งของทั้งหมดดังกล่าวสอดคล้องกับเงื่อนไขข้างต้นได้

$$\frac{n!}{n_1!n_2!\ldots n_k!} \quad \text{วิธี} \quad \text{ซึ่งอาจแทนด้วยสัญลักษณ์} \quad \binom{n}{n_1, n_2, \ldots, n_k}$$

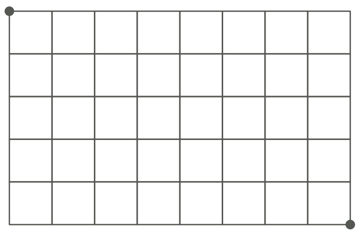
หมายเหตุ สัญลักษณ์ $\binom{n}{n_1,n_2,\ldots,n_k}$ ข้างต้นเรียกว่าสัมประสิทธิ์อเนกนาม (Multinomial Coefficient) ■

คำถาม 15. ห้องเรียนทานตะวันมีนักเรียน 25 คน ห้องเรียนกุหลาบมีนักเรียน 15 คน ต้องการคัดเลือกนักเรียนทั้งหมด 20 คน ไปทำกิจกรรมเต้นรำภาคฤดูร้อน โดยเลือกจากแต่ละห้องเรียน ห้องละเท่า ๆ กัน อยากทราบว่าจะคัดเลือกนักเรียนได้ทั้งหมดกี่รูปแบบ?

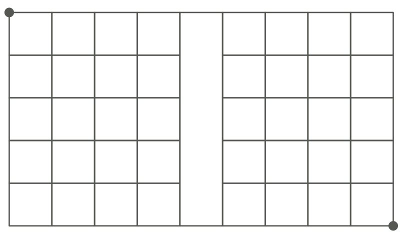
คำถาม 16 (การเรียงสับเปลี่ยนแบบวงกลม)**.** มีนักเรียนทั้งสิ้น 10 คน จะสามารถนั่งล้อมวงหันหน้าเข้าหากันได้กี่รูปแบบ? (กำหนดให้การจัดเรียงรูปแบบการนั่งสองรูปแบบใด ๆ ถือว่าเป็นรูปแบบเดียวกันก็ต่อเมื่อนักเรียนแต่ละคนมีเพื่อนคนเดิมที่นั่งติดกันทั้งทางด้านซ้ายและขวา แต่หากเพื่อนที่นั่งติดกันทั้งสองข้างดังกล่าวนั่งสลับที่กันจากเดิม ให้ถือว่าเป็นรูปแบบที่แตกต่างจากเดิม)

คำถาม 17. มีนักเรียนทั้งสิ้น 15 คน จะสามารถเลือกนักเรียน 10 คนมานั่งล้อมวงหันหน้าเข้าหากันได้กี่รูปแบบ โดยมีเงื่อนไขเหมือนกับคำถามข้อที่แล้ว?

คำถาม 18. พิจารณาตารางต่อไปนี้ซึ่งมีความกว้าง 8 หน่วยและสูง 5 หน่วย หากต้องการเดินไต่ตามขอบหรือเส้นตารางจากจุดบนซ้ายไปยังจุดล่างขวาโดยจะสามารถเดินลงด้านล่างหรือเดินไปทางขวาได้ทีละหนึ่งหน่วย อยากทราบว่าจะมีเส้นทางระหว่างจุดเริ่มต้นและจุดสิ้นสุดดังกล่าวทั้งสิ้นกี่เส้นทาง?



คำถาม 19. พิจารณาตารางต่อไปนี้ซึ่งมีความกว้าง 9 หน่วยและสูง 5 หน่วย หากต้องการเดินไต่ตามขอบหรือเส้นตารางจากจุดบนซ้ายไปยังจุดล่างขวาโดยจะสามารถเดินลงด้านล่างหรือเดินไปทางขวาได้ทีละหนึ่งหน่วย อยากทราบว่าจะมีเส้นทางระหว่างจุดเริ่มต้นและจุดสิ้นสุดดังกล่าวทั้งสิ้นกี่เส้นทาง?



คำถาม 20 (Stars and Bars Technique)**.** มีลูกกวาดรสเดียวกันอยู่ 15 เม็ด ต้องการแจกจ่ายให้เพื่อน 6 คน โดยแจกจ่ายให้ครบทุกเม็ด จะทำได้กี่วิธี?

คำถาม 21. กำหนดให้ s เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ แล้วจงหาจำนวนคำตอบ $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ ของสมการ $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = s$ ที่ $x_1, x_2, \ldots, x_n$ เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ

1.4 โจทย์ระคน 1

คำถาม 22. บิตสตริงความยาว n ที่มีสัญลักษณ์ 1 เพียงสองตัวพอดีมีทั้งหมดกี่สาย?

คำถาม 23. บิตสตริงความยาว n ที่มีจำนวนสัญลักษณ์ 1 เป็นจำนวนคู่ มีทั้งหมดกี่สาย?

คำถาม 24. สตริงที่ได้จากการจัดเรียงอักษรในสตริง SOOOOOSUS มีทั้งหมดกี่สาย?

คำถาม 25. มีลูกกวาดรสเดียวกันอยู่ 15 เม็ด ต้องการแจกจ่ายให้เพื่อน 6 คน โดยแจกจ่ายให้ครบทุกเม็ด และแต่ละคนจะต้องได้ลูกอมอย่างน้อย 1 เม็ด จะทำได้กี่วิธี?

คำถาม 26. กำหนดให้มีเซตของจุดบนวงกลมทั้งสิ้น n จุด (กำหนดให้ $n \geq 6$) จะสามารถเลือกลากเส้นเชื่อมเพื่อสร้างสามเหลี่ยมสองรูปจากเซตของจุดดังกล่าวได้ทั้งสิ้นกี่วิธี โดยสามเหลี่ยมทั้งสองรูปจะต้องไม่ตัดกัน และสามเหลี่ยมแต่ละรูปจะต้องมีพื้นที่มากกว่าศูนย์?

1.5 หลักการเพิ่มเข้า–ลบออก

หลักการ 27 (หลักการเพิ่มเข้า-ลบออก; Inclusion–Exclusion Principle)**.** กำหนดให้มีเซตจำกัด A และ B แล้วจำนวนสมาชิกของเซต $A \cup B$ จะมีค่าเป็น

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

กำหนดให้มีเซตจำกัด A, B, C แล้วจำนวนสมาชิกของเซต $A \cup B \cup C$ จะมีค่าเป็น

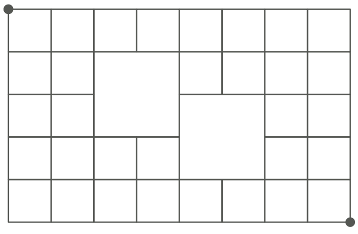
$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$$ ■

คำถาม 28. กำหนดให้เซต $S = \{1, \ldots, 200\}$ จะมีกี่จำนวนในเซตนี้ที่หารด้วย 3 หรือ 5 หรือ 7 ลงตัว?

คำถาม 29. มีนักเรียนอยู่กลุ่มหนึ่ง แต่ละคนเลือกลงทะเบียนเรียนวิชาเลือกเสรีอย่างน้อยหนึ่งวิชา จากข้อมูลสถิติของการลงทะเบียนดังต่อไปนี้ จะสรุปได้ว่ามีนักเรียนในกลุ่มนี้กี่คน?

- มีนักเรียนลงทะเบียนวิชาอีสปอร์ต 40 คน
- มีนักเรียนลงทะเบียนวิชายูทูบเบอร์ 35 คน
- มีนักเรียนลงทะเบียนวิชาเทรดคริปโตฯ 30 คน
- มีนักเรียนลงทะเบียนอย่างน้อยสองวิชาจากข้างต้น 25 คน
- มีนักเรียนลงทะเบียนทั้งสามวิชาข้างต้น 20 คน

คำถาม 30. พิจารณาตารางต่อไปนี้ซึ่งมีความกว้าง 8 หน่วยและสูง 5 หน่วย หากต้องการเดินไต่ตามขอบหรือเส้นตารางจากจุดบนซ้ายไปยังจุดล่างขวาโดยจะสามารถเดินลงด้านล่างหรือเดินไปทางขวาได้ทีละหนึ่งหน่วย อยากทราบว่าจะมีเส้นทางระหว่างจุดเริ่มต้นและจุดสิ้นสุดดังกล่าวทั้งสิ้นกี่เส้นทาง?



คำถาม 31. สมมติว่ามีถุงอยู่ใบหนึ่ง บรรจุลูกบอล 100 ลูกที่มีหมายเลขกำกับจาก 1 ถึง 100 อย่างละหนึ่งลูกพอดี เราจะจับลูกบอลจากถุงใบนี้ครั้งละหนึ่งลูก เป็นจำนวน 10 ครั้ง โดยหลังจากที่หยิบลูกบอลเสร็จแต่ละครั้ง เราจะใส่ลูกบอลกลับลงไปในถุงด้วย อยากทราบว่าเราจะจับลูกบอลได้กี่วิธี โดยที่ลูกบอลที่มีค่ามากที่สุดและน้อยที่สุดในการจับทั้ง 10 ครั้งคือ 75 และ 15 ตามลำดับ?

หลักการ 32 (หลักการเพิ่มเข้า–ลบออกในรูปทั่วไป; *Generalized* Inclusion–Exclusion Principle)**.** กำหนดให้มีเซตจำกัด $S_1, S_2, \ldots, S_n$ แล้วจำนวนสมาชิกของเซต $S_1 \cup S_2 \cup \ldots \cup S_n$ จะมีค่าเป็น

$$\begin{aligned}|S_1 \cup S_2 \cup \ldots \cup S_n| \;=\;& |S_1| + |S_2| + \ldots + |S_n| \\ & - |S_1 \cap S_2| - |S_1 \cap S_3| - \ldots - |S_{n-1} \cap S_n| \\ & + |S_1 \cap S_2 \cap S_3| + |S_1 \cap S_2 \cap S_4| + \ldots + |S_{n-2} \cap S_{n-1} \cap S_n| \\ & - \ldots \\ & + (-1)^{n+1}|S_1 \cap S_2 \cap \ldots \cap S_n|\end{aligned}$$

■

ข้อสังเกต 33. สังเกตว่ากฎการบวกในหัวข้อที่ 2 เป็นเพียงกรณีพิเศษของหลักการเพิ่มเข้า–ลบออก เพราะว่าส่วนร่วมของเซตอย่างน้อยสองเซตขึ้นไปจะเป็นเซตว่างซึ่งมีขนาดเท่ากับศูนย์ ■

2 เอกลักษณ์การนับและการกระจายทวินาม

2.1 หลักการนับสองทาง

หลักการนับสองทาง คือเครื่องมือในการพิสูจน์ความสมมูลกันของนิพจน์ทางคณิตศาสตร์ 2 นิพจน์ ด้วยการแสดงวิธีการนับสิ่งของอย่างเดียวกันด้วย 2 วิธีที่แตกต่างกัน

หลักการ 34 (หลักการนับสองทาง; Principle of Counting Two Ways)**.** สองวิธีที่ใช้นับเซตเดียวกัน ย่อมให้ค่าออกมาเท่ากัน ■

คำถาม 35. จงแสดงว่า สำหรับจำนวนเต็มบวก n และ k ใด ๆ ซึ่ง $0 \le k \le n$ แล้วเอกลักษณ์ดังต่อไปนี้ถูกต้อง

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

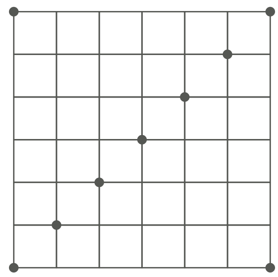
คำถาม 36. จงแสดงว่า สำหรับจำนวนเต็มบวก n ใด ๆ เอกลักษณ์ดังต่อไปนี้ถูกต้อง

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \ldots + \binom{n}{n} = 2^n$$

คำถาม 37. จงแสดงว่า สำหรับจำนวนเต็มบวก n ใด ๆ เอกลักษณ์ดังต่อไปนี้ถูกต้อง

$$\binom{2n}{n} = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i}\binom{n}{n-i}$$

คำใบ้ หนึ่งในวิธีพิสูจน์เอกลักษณ์ข้างต้นคือการนับเส้นทางที่ไต่ตามขอบหรือเส้นตารางขนาด $n \times n$ จากจุดบนซ้ายไปยังจุดล่างขวา (ดังรูปข้างล่าง สำหรับกรณีตัวอย่าง $n = 6$) โดยสามารถเดินลงด้านล่างหรือเดินไปทางขวาได้ทีละหนึ่งหน่วย



2.2 ทฤษฎีบททวินาม

ทฤษฎีบท 38 (ทฤษฎีบททวินาม (Binomial Theorem))**.** ในการกระจายทวินาม $(x + y)^n$ นั้นจะประกอบไปด้วยพจน์ $x^{n-k}y^k$ ซึ่งมีค่าสัมประสิทธิ์เป็น $\binom{n}{k}$ (สำหรับแต่ละจำนวนเต็ม $k = 0, 1, 2, \ldots, n$) หรือกล่าวอีกนัยหนึ่งคือสมการต่อไปนี้เป็นจริง

$$(x+y)^n = \binom{n}{0}x^n + \binom{n}{1}x^{n-1}y + \binom{n}{2}x^{n-2}y^2 + \ldots + \binom{n}{n-1}xy^{n-1} + \binom{n}{n}y^n$$

สังเกตว่าสัมประสิทธิ์ทวินาม $\binom{n}{k}$ ในแต่ละพจน์จะสอดคล้องกับจำนวนวิธีที่จะเลือกตัวแปร y จำนวน จากคู่ของ $x + y$ ทั้งหมด n คู่ได้กี่วิธี ■

คำถาม 39. จะมีวิธีพิสูจน์เอกลักษณ์ที่ปรากฏในคำถามที่ 36 (ดังที่แสดงข้างล่าง) โดยใช้ทฤษฎีบททวินามได้อย่างไร?

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \ldots + \binom{n}{n} = 2^n$$

คำถาม 40. จงแสดงว่า สำหรับจำนวนเต็มบวกคี่ n ใด ๆ เอกลักษณ์ดังต่อไปนี้ถูกต้อง

$$\binom{n}{0}+\binom{n}{2}+\binom{n}{4}+\ldots+\binom{n}{n-1}=2^{n-1}$$

และสำหรับจำนวนเต็มบวกคู่ n ใด ๆ เอกลักษณ์ดังต่อไปนี้ถูกต้อง

$$\binom{n}{0}+\binom{n}{2}+\binom{n}{4}+\ldots+\binom{n}{n}=2^{n-1}$$

2.3 สามเหลี่ยมปาสคาล

พิจารณาสามเหลี่ยมปาสคาล (Pascal’s Triangle) ดังรูปต่อไปนี้ โดยที่จำนวนที่ปรากฏในแถวที่ i (เมื่อ $i \geq 0$) คือสัมประสิทธิ์ของแต่ละพจน์ในการกระจายทวินาม

$$\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & \binom{0}{0} & & & & & \\
 & & & & \binom{1}{0} & & \binom{1}{1} & & & & \\
 & & & \binom{2}{0} & & \binom{2}{1} & & \binom{2}{2} & & & \\
 & & \binom{3}{0} & & \binom{3}{1} & & \binom{3}{2} & & \binom{3}{3} & & \\
 & \binom{4}{0} & & \binom{4}{1} & & \binom{4}{2} & & \binom{4}{3} & & \binom{4}{4} & \\
\binom{5}{0} & & \binom{5}{1} & & \binom{5}{2} & & \binom{5}{3} & & \binom{5}{4} & & \binom{5}{5}
\end{array}
\qquad
\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\
 & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \\
1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1
\end{array}$$

สังเกตว่าสามเหลี่ยมปาสคาลมีความสมมาตรในแนวแกนตั้ง และมีค่าขอบซ้ายและขวาของทุกแถวเป็น 1

ทฤษฎีบท 41. กำหนดให้ n, k เป็นจำนวนเต็มโดยที่ $n \geq 1$ และ $0 \leq k \leq n$ แล้วเอกลักษณ์ต่อไปนี้เป็นจริง

$$\binom{n}{k}=\binom{n-1}{k-1}+\binom{n-1}{k}$$

กล่าวอีกนัยหนึ่งคือค่าของจำนวนในสามเหลี่ยมปาสคาลจะเท่ากับผลรวมของจำนวนสองจำนวนที่อยู่ติดกันเหนือจำนวนนั้นพอดี (*หมายเหตุ* สมมติให้จำนวนที่อยู่ในตำแหน่งนอกสามเหลี่ยมนี้มีค่าเป็นศูนย์) ■

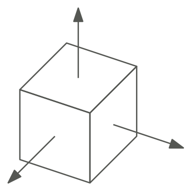
คำถาม 42. จงพิสูจน์ทฤษฎีบทข้างต้นโดยใช้ทฤษฎีบทที่ 13

คำถาม 43. จงแสดงว่า สำหรับจำนวนเต็มไม่ติดลบ n และ k ใด ๆ เอกลักษณ์ดังต่อไปนี้ถูกต้อง

$$\binom{n}{0} + \binom{n+1}{1} + \binom{n+2}{2} + \ldots + \binom{n+k}{k} = \binom{n+k+1}{k}$$

2.4 โจทย์ระคน 2

คำถาม 44. ลูกเต๋าหนึ่งลูก มี 6 หน้าที่แตกต่างกัน จะสามารถนำมาวางในปริภูมิสามมิติ (3-Dimensional Space) โดยที่จุดศูนย์กลางของลูกเต๋าอยู่ที่จุดกำเนิด $(0, 0, 0)$ และทุกหน้ามีระนาบที่ตั้งฉากกับแกน x, y, หรือ z ได้ทั้งหมดกี่รูปแบบ?



คำถาม 45. กำหนดให้มีนักเรียน 25 คนที่มีวันเกิดแตกต่างกันทั้งหมด ต้องการแบ่งนักเรียนเหล่านี้ออกเป็น 5 กลุ่ม กลุ่มละ 5 คน จากนั้นแต่ละกลุ่มจะต้องเลือกคนที่อายุน้อยที่สุดเป็นหัวหน้ากลุ่ม อยากทราบว่าจะมีวิธีการแบ่งกลุ่มนักเรียนเหล่านี้ และเลือกหัวหน้ากลุ่มตามเงื่อนไขข้างต้นได้กี่กรณี?

คำถาม 46. กำหนดให้เซต $S = \{1, 2, \ldots, 12\}$ จงหาจำนวนสับเซตของเซต S ดังกล่าวที่มีสมาชิก 4 ตัวโดยที่มีจำนวนคู่และจำนวนคี่อยู่อย่างน้อยอย่างละหนึ่งจำนวน

คำถาม 47. จงหาจำนวนคำตอบของชุดอันดับ $(x_1, x_2, x_3) \in \{0, 1, 2, \ldots, 10\}^3$ ที่สอดคล้องกับสมการ $x_1 + x_2 + x_3 = 20$

คำถาม 48. จงพิสูจน์ว่า
$$\binom{2n}{n} = 2\binom{2n-1}{n-1}$$

คำถาม 49. จงพิสูจน์ว่า
$$\sum_k \binom{k}{\ell}\binom{n}{k} = \binom{n}{\ell}2^{n-\ell}$$
คำใบ้ นับวิธีการคัดผู้เข้าแข่งขัน โดยมีการคัดสองรอบ

3 หลักรังนกพิราบ

หลักการ 50 (หลักรังนกพิราบ; Pigeonhole Principle)**.** หากเรามีนกพิราบ n ตัว โดยที่นกแต่ละตัวจะอาศัยอยู่ในรังนกหนึ่งรังจากทั้งหมด m รังโดยที่ $n > m$ แล้วจะมีรังนกอย่างน้อยหนึ่งรังที่มีนกพิราบอย่างน้อย 2 ตัว ■

หลักการ 51 (หลักรังนกพิราบในรูปทั่วไป; *Generalized* Pigeonhole Principle)**.** หากเรามีนกพิราบอยู่ทั้งหมด n ตัว โดยที่นกแต่ละตัวจะอาศัยอยู่ในรังนกหนึ่งรังจากทั้งหมด m แล้วจะมีรังนกอย่างน้อยหนึ่งรังที่มีนกพิราบอย่างน้อย $\lceil n/m \rceil$ ตัว ■

คำถาม 52. ถุงใบหนึ่งมีลูกบอลบรรจุอยู่ 6 สี สีละ 100 ลูก จงหาจำนวนลูกบอลที่น้อยที่สุดที่เป็นไปได้ที่คนหนึ่งจะต้องล้วงออกมาจากถุงดังกล่าว จึงจะรับประกันว่ามีลูกบอลสีหนึ่งอย่างน้อย 50 ลูก

คำถาม 53. กำหนดให้ $x_1, x_2, \ldots, x_{10}$ เป็นลำดับของจำนวนเต็ม จงพิสูจน์ว่าจะมีจำนวนที่อยู่ติดกันอย่างน้อยหนึ่งชุด ที่มีผลรวมลงท้ายด้วยศูนย์ (*หมายเหตุ* จำนวนที่ติดกันคือ $x_i, x_{i+1}, \ldots, x_j$ เมื่อ $1 \leq i \leq j \leq 10$)

คำถาม 54. กำหนดให้ $H : \mathbb{N} \to \{0, 1\}^{256}$ เป็นฟังก์ชันแฮช (hash function) ชนิดหนึ่งที่รับจำนวนเต็มไม่ติดลบเข้าไปหนึ่งจำนวน แล้วจะย่อยออกมาเป็นบิตสตริงความยาว 256 แล้วจงพิสูจน์ว่าสำหรับจำนวนเต็ม $k \geq 1$ ใด ๆ จะมีจำนวนเต็ม $x_1, x_2, \ldots, x_k \in \mathbb{N}$ ที่<u>แตกต่างกันทั้งหมด</u>ซึ่งสอดคล้องกับสมการ

$$H(x_1) = H(x_2) = \ldots = H(x_k)$$

4 ลำดับและความสัมพันธ์เวียนเกิด

4.1 ลำดับเลขคณิตและลำดับเรขาคณิต

นิยาม 55 (ลำดับเลขคณิต; Arithmetic Sequence)**.** ลำดับเลขคณิตคือลำดับ $a_0, a_1, a_2, \ldots$ ซึ่งนิยามด้วยความสัมพันธ์เวียนเกิด (recurrence relation) $a_i = a_{i-1} + c$ สำหรับ $i \geq 1$ และค่าคงตัว c ■

นิยาม 56 (ลำดับเรขาคณิต; Geometric Sequence)**.** ลำดับเรขาคณิตคือลำดับ $a_0, a_1, a_2, \ldots$ ซึ่งนิยามด้วยความสัมพันธ์เวียนเกิด $a_i = ra_{i-1}$ สำหรับ $i \geq 1$ และค่าคงตัว $r \neq 0$ ■

4.2 ลำดับฟิโบนัชชี

นิยาม 57 (ลำดับฟิโบนัชชี; Fibonacci Sequence)**.** ลำดับฟิโบนัชชีคือลำดับ $F_0, F_1, F_2, \ldots$ ซึ่งนิยามด้วยความสัมพันธ์เวียนเกิด $F_i = F_{i-2} + F_{i-1}$ สำหรับ $i \geq 2$ และมีขั้นฐานคือ $F_0 = 0, F_1 = 1$

จำนวน 40 จำนวนแรกของลำดับฟิโบนัชชีคือ

$$\begin{aligned}
&0, 1, 1, 2, 3,\\
&5, 8, 13, 21, 34,\\
&55, 89, 144, 233, 377,\\
&610, 987, 1597, 2584, 4181,\\
&6765, 10946, 17711, 28657, 46368,\\
&75025, 121393, 196418, 317811, 514229,\\
&832040, 1346269, 2178309, 3524578, 5702887,\\
&9227465, 14930352, 24157817, 39088169, 63245986, \ldots
\end{aligned}$$

■

คำถาม 58. จงแสดงว่า สำหรับจำนวนเต็มไม่ติดลบ n ใด ๆ เอกลักษณ์ดังต่อไปนี้ถูกต้อง

- $F_0 + F_1 + \ldots + F_n = F_{n+2} - 1$
- $F_1 + F_3 + F_5 + \ldots + F_{2n-1} = F_{2n}$

คำถาม 59. บิตสตริงความยาว n ตัวที่ไม่มีเลขโดด 1 สองตัวใด ๆ อยู่ติดกันเลย มีทั้งสิ้นกี่สาย?

คำถาม 60. พื้นที่ขนาด $1 \times n$ หน่วย มีกระเบื้องขนาด 1×1 หน่วย และกระเบื้องขนาด 1×2 หน่วย สามารถใช้กระเบื้องปูจนเต็มพื้นที่ได้กี่วิธี

คำถาม 61. พื้นที่ขนาด $2 \times n$ หน่วย มีกระเบื้องขนาด 1×2 หน่วย สามารถใช้กระเบื้องปูจนเต็มพื้นที่ได้กี่วิธี

ปัญหา 62 (การค้นหาจำนวนฟิโบนัชชีลำดับที่ n)**.** กำหนดให้จำนวนเต็ม $n \in \mathbb{N}$ เป็นข้อมูลนำเข้า เราต้องการหาค่าของสมาชิกลำดับฟิโบนัชชี F_n อย่างรวดเร็ว ซึ่งกระทำได้หลายวิธี เช่น

1. **วิธีแก้สมการลักษณะเฉพาะ** เราสามารถหารูปปิดของสมาชิกลำดับฟิโบนัชชี F_n ได้ด้วยการแก้สมการลักษณะเฉพาะ (characteristic equation) จากความสัมพันธ์เวียนเกิดตามที่ปรากฏในนิยามที่ 57

   สุดท้ายแล้วเราจะได้คำตอบของ F_n ที่เป็นรูปปิดดังนี้

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]$$

2. **วิธียกกำลังในรูปฟังก์ชันเชิงเส้น** เราจะเขียนความสัมพันธ์เวียนเกิดของลำดับฟิโบนัชชีในรูปแบบการคูณของเมตริกซ์กับเวกเตอร์ (matrix–vector multiplication) ซึ่งเป็นฟังก์ชันเชิงเส้นแบบหนึ่งได้ดังต่อไปนี้

$$\begin{bmatrix} F_i \\ F_{i-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_{i-1} \\ F_{i-2} \end{bmatrix} \qquad \text{เมื่อ } i \geq 2$$

   ฉะนั้นเราสามารถหา $\begin{bmatrix} F_{n+1} \\ F_n \end{bmatrix}$ ได้จากการคูณเมตริกซ์ซ้ำ ๆ กันหลายครั้ง จึงได้จากสมการดังข้างล่างนี้

$$\begin{bmatrix} F_{n+1} \\ F_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^n \begin{bmatrix} F_1 \\ F_0 \end{bmatrix} \qquad \text{เมื่อ } n \geq 0$$

   ซึ่งการคำนวณการยกกำลังสามารถกระทำได้อย่างรวดเร็วโดยใช้เทคนิคการแบ่งแยกแล้วเอาชนะ (divide and conquer) หรือจะใช้การยกกำลังด้วยการหากำลังสอง (exponentiation by repeated squaring) ก็ได้

ทั้งสองวิธีข้างต้นจะใช้เวลาประมวลผลเป็น $O(k)$ เมื่อ $k = \lfloor \log_2 n \rfloor$ คือจำนวนหลักของค่า n ในรูปฐานสอง เมื่อสมมติให้กระบวนการทางพีชคณิตพื้นฐาน (เช่นบวก ลบ คูณ และ หาร) ใช้เวลาคงที่

5 การนับที่ซับซ้อนขึ้น

5.1 การเรียงสับเปลี่ยนแบบไม่อยู่ที่เดิม

ทฤษฎีบท 63 (การเรียงสับเปลี่ยนแบบไม่อยู่ที่เดิม; Derangement)**.** มีวัตถุ n ชิ้นที่แตกต่างกัน คือ $x_1, \ldots, x_n$ และเราสามารถนำวัตถุทั้ง n ชิ้น นำมาวางเรียงเป็นลำดับ n ตำแหน่ง โดยที่ไม่มีวัตถุ x_i อยู่ในตำแหน่งที่ i ได้ D_n รูปแบบ แล้ว

$$D_n = n! - \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} D_{n-k}$$

เมื่อ $n \geq 1$ โดยที่ $D_0 = 1$ และ

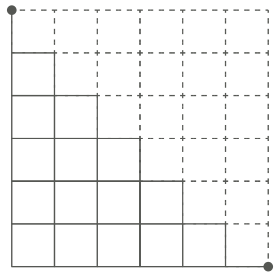
$$D_n = (n-1)(D_{n-1} + D_{n-2})$$

เมื่อ $n \geq 2$ โดยที่ $D_0 = 1$ และ $D_1 = 0$ ■

5.2 จำนวนกาตาล็อง

จำนวนกาตาล็อง (Catalan numbers) เป็นจำนวนที่พบได้ทั่วไปในปัญหาการนับเชิงคอมบินาทอริก เช่น ปัญหาการเขียนสตริงของวงเล็บ n คู่ที่จับคู่กันได้อย่างลงตัวและสมบูรณ์ (กล่าวคือวงเล็บเปิดต้องมาก่อนวงเล็บของคู่เดียวกันและคู่วงเล็บที่เปิดทีหลังจะต้องปิดก่อน) ยังมีปัญหาการนับอื่น ๆ อีกมากมายที่มีความสัมพันธ์แบบ bijection กับปัญหาดังกล่าว เช่นปัญหาต่อไปนี้

คำถาม 64. พิจารณาปัญหาดังต่อไปนี้ กำหนดให้มีตารางขนาด $n \times n$ โดยที่เส้นและขอบตารางในฝั่งครึ่งบนขวาของตารางเป็นเส้นประ และที่เหลือแสดงเป็นเส้นทึบ (ดังรูปตัวอย่างข้างล่างสำหรับกรณี $n = 6$) เราต้องการเดินจากจุดบนซ้ายสุดของตารางไปยังจุดล่างขวาสุด โดยสามารถเดินลงล่างหรือไปทางขวาได้ทีละหนึ่งหน่วย และห้ามไม่ให้เดินโดยใช้เส้นประที่กำหนดไว้ จงหาจำนวนเส้นทางระหว่างสองจุดที่กำหนดให้



หัวข้อเพิ่มเติม

หัวข้อดังต่อไปนี้เกี่ยวข้องกับการนับ แต่ไม่ได้ครอบคลุมอยู่ในหลักสูตรโอลิมปิกวิชาการคอมพิวเตอร์

- สเตอร์ลิงชนิดที่หนึ่งและสอง (Stirling numbers of first and second kind)
- การนับ 12 กระบวนท่าของโรตา (Rota's twelvefold way)
- การแก้ความสัมพันธ์เวียนเกิดด้วยการแก้สมการลักษณะเฉพาะ (characteristic equation)
- การนับด้วยการใช้ฟังก์ชันก่อกำเนิด (generating function)
- ทฤษฎีการนับของเบิร์นไซด์ (Burnside's counting theorem หรือ Cauchy–Frobenius lemma)

เอกสารอ้างอิง

[LLM10] Eric Lehman, F Thomson Leighton, and Albert R Meyer. Mathematics for Computer Science, 2010. Revised Tuesday 6th June 2018.

[LPV00] László Lovász, József Pelikán, and Katalin Vesztergombi. Discrete Maths: Elementary and Beyond, 2000.

[Wes15] Douglas West. Combinatorial Mathematics: Fall 2015 Edition, 2015.