

คอมบินาทอริกเบื้องต้น

ธนะ วัฒนวารุณ

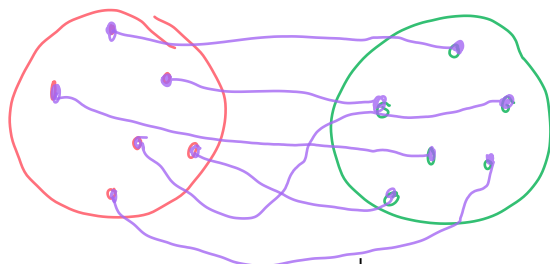
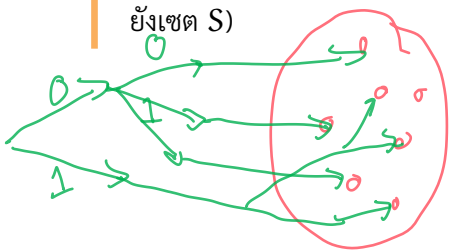
เอกสารนี้ดัดแปลงจากเอกสาร คอมบินาทอริกเบื้องต้น ของ อาภาพงศ์ จันทร์ทอง

1 การนับ

1.1 กฎการนับพื้นฐาน

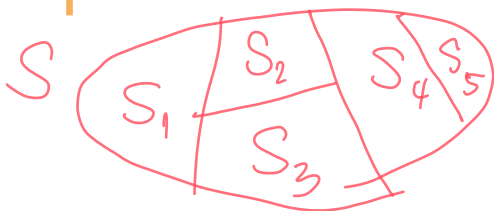
① จำนวนนับเกิน ② จำนวนไม่เท่า

หลักการ 1 (ความสัมพันธ์แบบหนึ่งต่อหนึ่งทั่วถึง; Bijection). เราสามารถนับจำนวนสมาชิกของเซต S โดยให้นับสมาชิกของเซต T แทนได้ เมื่อมีฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งทั่วถึง (bijection) จากเซต S ไปยังเซต T (หรือจากเซต T ไปยังเซต S)



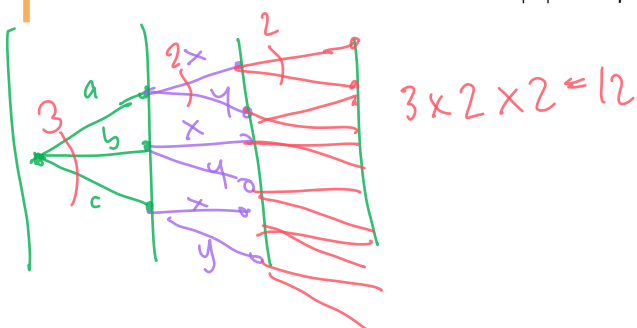
หลักการ 2 (กฎการบวก; Rule of Sum). กำหนดให้เซต S เป็นเซตจำกัด (finite set) ที่สามารถแบ่งได้เป็นเซต S_1, S_2, \dots, S_n โดยที่สองเซตใด ๆ ไม่มีสมาชิกร่วมกันเลย แล้ว S จะมีจำนวนสมาชิกเป็น

$$|S| = |S_1| + |S_2| + \dots + |S_n|$$

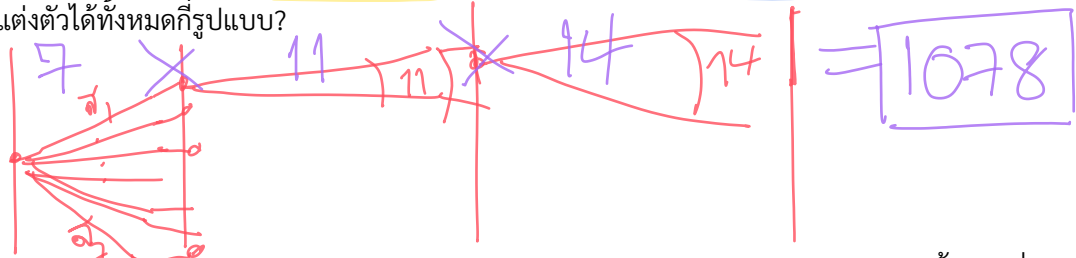


หลักการ 3 (กฎการคูณ; Rule of Product). กำหนดให้เซต S เป็นเซตจำกัด ที่ประกอบด้วยสมาชิกที่สร้างได้จากขั้นตอน k ขั้น ขั้นตอนที่ i (สำหรับ $i \in \{1, \dots, k\}$) มีตัวเลือกที่เป็นไปได้ n_i รูปแบบ โดยที่จำนวนรูปแบบนี้ไม่ขึ้นกับขั้นตอนก่อนหน้า แล้ว S จะมีจำนวนสมาชิกเป็น

$$|S| = n_1 \cdot n_2 \cdot \dots \cdot n_k$$



คำถาม 4. คุณสมมีเสื้อในตู้เสื้อผ้า 7 ตัว มีกางเกง 5 ตัว มีกระโปรง 6 ตัว และมีหมวก 13 ใบ อยากทราบว่าหากคุณสมต้องการเลือกเสื้อหนึ่งตัว กางเกงหรือกระโปรงหนึ่งตัว และอาจสวมหมวกหนึ่งใบหรือไม่สวมหมวกก็ได้ คุณสมจะสามารถแต่งตัวได้ทั้งหมดกี่รูปแบบ?



คำถาม 5. บิตสตริง (bit string) ความยาว n ตัว (แต่แต่ละตัวประกอบไปด้วยสัญลักษณ์ 0 หรือ 1) มีทั้งหมดกี่สาย?

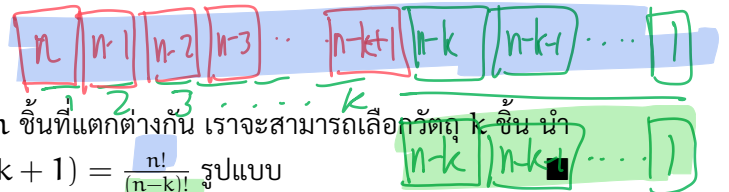


คำถาม 6. มีถุงอยู่ทั้งสิ้น 3 ใบซึ่งล้วนบรรจุสิ่งของที่แตกต่างกันทั้งหมด นอกจากนั้นยังทราบว่างแต่ละใบจะมีสิ่งของมากกว่าหนึ่งชิ้น หากเราหยิบสิ่งของจากถุงใบที่หนึ่งและถุงใบที่สองถุงละ 1 ชิ้น จะได้คู่อันดับของสิ่งของที่หยิบออกมาได้ทั้งหมด 78 รูปแบบ แต่ถ้าหากเราหยิบสิ่งของจากถุงใบที่สองและถุงใบที่สามถุงละ 1 ชิ้น จะได้คู่อันดับของสิ่งของที่หยิบออกมาได้ทั้งหมด 143 รูปแบบ แล้วถ้าหากเราหยิบสิ่งของจากถุงทั้ง 3 ใบถุงละ 1 ชิ้น แล้วจะได้ชุดอันดับของสิ่งของที่หยิบออกมาได้ทั้งหมดกี่รูปแบบ?



$$\begin{aligned}
 n_1 &= 6 \\
 n_2 &= 13 \\
 n_3 &= 11 \\
 n_1 \cdot n_2 &= 78 \\
 n_2 \cdot n_3 &= 143 \\
 n_1 \cdot n_2 \cdot n_3 &= 6 \times 13 \times 11 = 858
 \end{aligned}$$

1.2 การเรียงสับเปลี่ยน



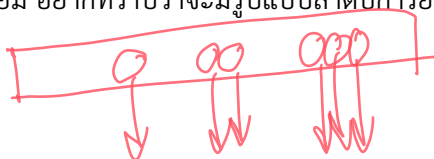
ทฤษฎีบท 7 (การเรียงสับเปลี่ยน; Permutation). มีวัตถุ n ชิ้นที่แตกต่างกัน เราจะสามารถเลือกวัตถุ k ชิ้น นำมาวางเรียงเป็นลำดับได้ทั้งสิ้น $n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$ รูปแบบ

คำถาม 8. มีนักเรียน 24 คนรอเข้าแถวตอนรดักอาหารอย่างสุภาพชนโดยพร้อมเพรียงกันทุกคน อยากทราบว่า จะมีรูปแบบลำดับการยืนของนักเรียนในแถวทั้งหมดกี่รูปแบบ?

$$24!$$

$$\frac{24!}{(24-24)!} = \frac{24!}{0!} = \frac{24!}{1}$$

คำถาม 9. มีนักเรียน 24 คนรอเข้าแถวตอนรดักอาหารอย่างสุภาพชนโดยพร้อมเพรียงกันทุกคน แต่ในระหว่างรออาหารมานั้น อาจารย์ขออาสาสมัครให้นักเรียน 6 คนไปช่วยยกของให้อาจารย์ด้วยการเลือกอย่างสุ่มอย่างเท่าเทียม อยากทราบว่า จะมีรูปแบบลำดับการยืนของนักเรียนที่เหลือภายในแถวจากเดิม 24 คนทั้งหมดกี่รูปแบบ?



$$\frac{24!}{(24-6)!} = \frac{24!}{6!}$$

คำถาม 10. มีจำนวนเต็มบวก 5 หลัก (ไม่ขึ้นต้นด้วย 0) ทั้งหมดกี่จำนวนที่สอดคล้องกับเงื่อนไขแต่ละข้อต่อไปนี้?

(a) ไม่มีเงื่อนไขเพิ่มเติม

$$(a) \boxed{9} \times \boxed{10} \times \boxed{10} \times \boxed{10} \times \boxed{10} = 90,000$$

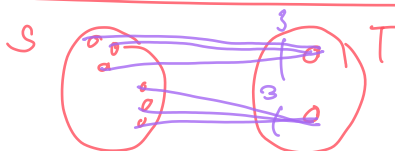
(b) ไม่มีเลขโดดใด ๆ ที่ซ้ำกันเลย

(c) ไม่มีเลขโดดที่อยู่ติดกันคู่ใด ๆ ที่ซ้ำกันเลย

$$(b) \boxed{9} \times \boxed{8} \times \boxed{7} \times \boxed{6} \times \boxed{5} = 9 \times \frac{9!}{5!}$$

$$(c) \boxed{9} \boxed{9} \boxed{9} \boxed{9} \boxed{9} = 9^5$$

1.3 การจับกลุ่ม



นิยาม 11. กำหนดให้มีเซต S และ T และฟังก์ชัน $f : S \rightarrow T$ แล้ว f จะเป็นความสัมพันธ์แบบ k ต่อหนึ่งอย่างทั่วถึง (k -to-1 correspondence) เมื่อสำหรับสมาชิก $y \in T$ ใด ๆ จะมีสมาชิก $x \in S$ ทั้งสิ้น k ตัวพอดีที่สอดคล้องกับสมการ $f(x) = y$

หลักการ 12 (กฎการหาร; Rule of Division). กำหนดให้ S และ T เป็นเซตจำกัด และมีฟังก์ชัน $f : S \rightarrow T$ ที่มีความสัมพันธ์แบบ k ต่อหนึ่งอย่างทั่วถึงแล้วนั้น จะพบว่า $|S| = k \cdot |T|$

ทฤษฎีบท 13 (การจัดกลุ่ม; Combination). มีวัตถุ n ชิ้นที่แตกต่างกัน เราจะสามารถเลือกวัตถุ k ชิ้นได้ทั้งสิ้น

$$\frac{n!}{k!(n-k)!} \text{ รูปแบบ ซึ่งอาจแทนด้วยสัญลักษณ์ } \binom{n}{k} \text{ ซึ่งอ่านว่า "n เลือก k"}$$

หมายเหตุ สัญลักษณ์ $\binom{n}{k}$ ข้างต้นมีชื่อเรียกว่าสัมประสิทธิ์ทวินาม (Binomial Coefficient)

ทฤษฎีบท 14. มีวัตถุ n ชิ้นที่แตกต่างกัน เราจะแบ่งสิ่งของออกให้คนทั้งสิ้น k คน โดยคนที่หนึ่งจะได้ของ n_1 ชิ้น คนที่สองจะได้ของ n_2 ชิ้น ไปเรื่อย ๆ (และกำหนดให้ $n_1 + n_2 + \dots + n_k = n$)

เราจะแบ่งสิ่งของทั้งหมดดังกล่าวสอดคล้องกับเงื่อนไขข้างต้นได้

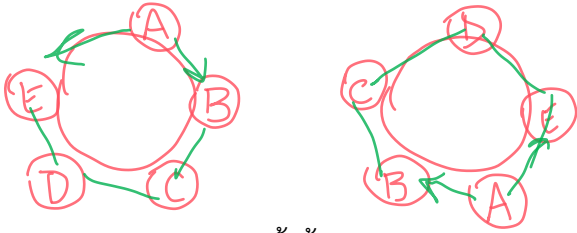
$$\frac{n!}{n_1!n_2! \dots n_k!} \text{ วิธี ซึ่งอาจแทนด้วยสัญลักษณ์ } \binom{n}{n_1, n_2, \dots, n_k}$$

หมายเหตุ สัญลักษณ์ $\binom{n}{n_1, n_2, \dots, n_k}$ ข้างต้นเรียกว่าสัมประสิทธิ์อเนกนาม (Multinomial Coefficient)

คำถาม 15. ห้องเรียนทานตะวันมีนักเรียน 25 คน ห้องเรียนกุหลาบมีนักเรียน 15 คน ต้องการคัดเลือกนักเรียนทั้งหมด 20 คน ไปทำกิจกรรมเต้นรำภาคฤดูร้อน โดยเลือกจากแต่ละห้องเรียน ห้องละเท่า ๆ กัน อยากทราบว่า จะคัดเลือกนักเรียนได้ทั้งหมดกี่รูปแบบ?

$$\binom{25}{10} \binom{15}{10}$$

คำถาม 16 (การเรียงสับเปลี่ยนแบบวงกลม). มีนักเรียนทั้งสิ้น n คน จะสามารถนั่งล้อมวงหันหน้าเข้าหากันได้กี่รูปแบบ? (กำหนดให้การจัดเรียงรูปแบบการนั่งสองรูปแบบใด ๆ ถือว่าเป็นรูปแบบเดียวกันก็ต่อเมื่อนักเรียนแต่ละคนมีเพื่อนคนเดิมที่นั่งติดกันทั้งทางด้านซ้ายและขวา แต่หากเพื่อนที่นั่งติดกันทั้งสองข้างดังกล่าวนี้สลับที่กันจากเดิม ให้ถือว่าเป็นรูปแบบที่แตกต่างจากเดิม)

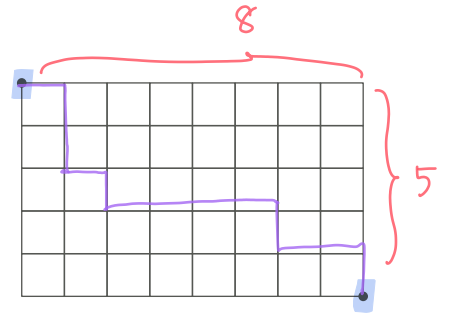
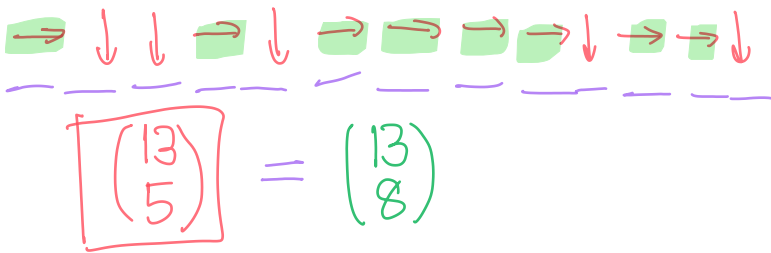


$$\frac{10!}{10} = 9! \quad \frac{n!}{n} = (n-1)!$$

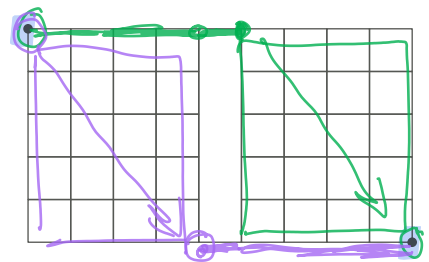
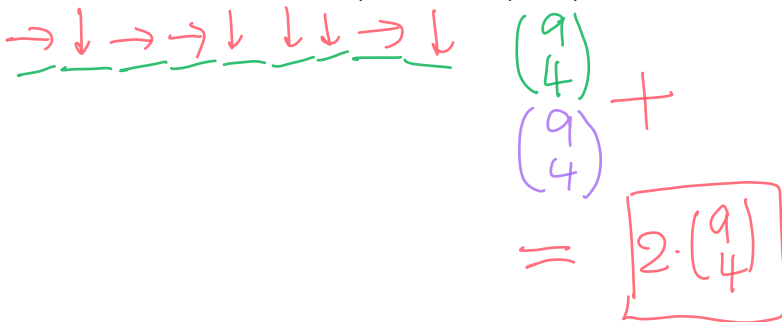
คำถาม 17. มีนักเรียนทั้งสิ้น 15 คน จะสามารถเลือกนักเรียน 10 คนมานั่งล้อมวงหันหน้าเข้าหากันได้กี่รูปแบบ โดยมีเงื่อนไขเหมือนกับคำถามข้อที่แล้ว?

$$\binom{15}{10} 9!$$

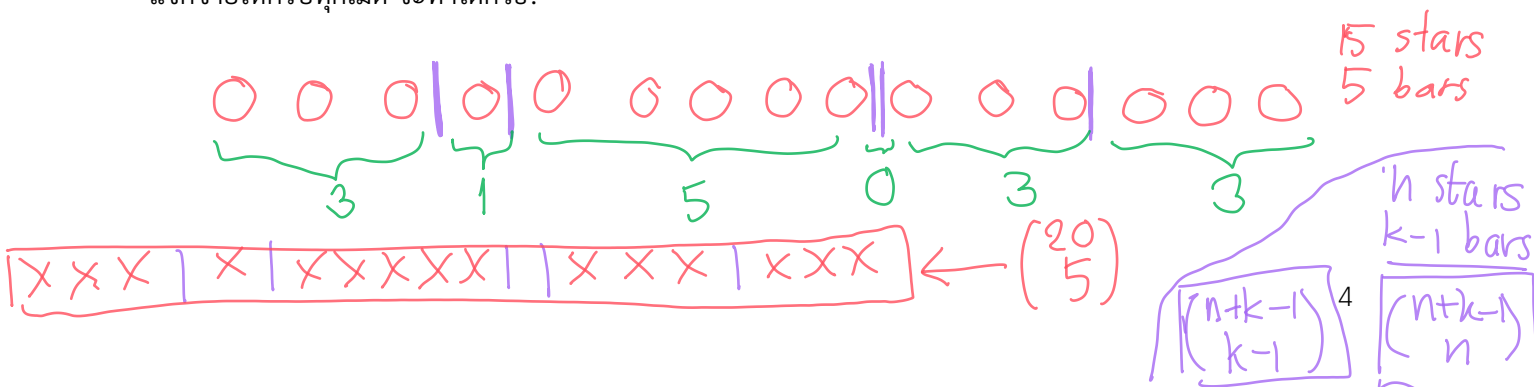
คำถาม 18. พิจารณาตารางต่อไปนี้ซึ่งมีความกว้าง 8 หน่วยและสูง 5 หน่วย หากต้องการเดินได้ตามขอบหรือเส้นตารางจากจุดบนซ้ายไปยังจุดล่างขวาโดยจะสามารถเดินลงด้านล่างหรือเดินไปทางขวาได้ทีละหนึ่งหน่วย อยากทราบว่าจะมีเส้นทางระหว่างจุดเริ่มต้นและจุดสิ้นสุดดังกล่าวทั้งสิ้นกี่เส้นทาง?



คำถาม 19. พิจารณาตารางต่อไปนี้ซึ่งมีความกว้าง 9 หน่วยและสูง 5 หน่วย หากต้องการเดินได้ตามขอบหรือเส้นตารางจากจุดบนซ้ายไปยังจุดล่างขวาโดยจะสามารถเดินลงด้านล่างหรือเดินไปทางขวาได้ทีละหนึ่งหน่วย อยากทราบว่าจะมีเส้นทางระหว่างจุดเริ่มต้นและจุดสิ้นสุดดังกล่าวทั้งสิ้นกี่เส้นทาง?



คำถาม 20 (Stars and Bars Technique). มีลูกกวาดรสเดียวกันอยู่ 15 เม็ด ต้องการแจกจ่ายให้เพื่อน 6 คน โดยแจกจ่ายให้ครบทุกเม็ด จะทำได้กี่วิธี?



คำถาม 21. กำหนดให้ s เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ แล้วจงหาจำนวนคำตอบ (x_1, x_2, \dots, x_n) ของสมการ $x_1 + x_2 + \dots + x_n = s$ ที่ x_1, x_2, \dots, x_n เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 12$$

(5, 2, 3, 0, 2)
 (4, 1, 1, 2, 4)
 (1, 1, 2, 4, 4)

s stars
 $n-1$ bars

$$\binom{s+n-1}{n-1}$$

$$\binom{s+n-1}{s}$$

1.4 โจทย์ระคน 1

คำถาม 22. บิตสตริงความยาว n ที่มีสัญลักษณ์ 1 เพียงสองตัวพอดีมีทั้งหมดกี่สาย?

$$\binom{n}{2}$$

คำถาม 23. บิตสตริงความยาว n ที่มีจำนวนสัญลักษณ์ 1 เป็นจำนวนคู่ มีทั้งหมดกี่สาย?

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{2} + \binom{n}{4} + \dots$$

$$\frac{0}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{0}{2} \times \frac{0}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{0}{2} = 2^{n-1}$$

คำถาม 24. สตริงที่ได้จากการจัดเรียงอักษรในสตริง S00000SUS มีทั้งหมดกี่สาย?

$$\binom{9}{3, 5, 1} = \frac{9!}{3!5!1!} = 504$$

$9 \leftarrow \begin{matrix} 3 \times 3 \\ 0 \times 5 \\ 1 \times 1 \end{matrix}$

คำถาม 25. มีลูกกวาดรสเดียวกันอยู่ 15 เม็ด ต้องการแจกจ่ายให้เพื่อน 6 คน โดยแจกจ่ายให้ครบทุกเม็ด และแต่ละคนจะต้องได้ลูกอมอย่างน้อย 1 เม็ด จะทำได้กี่วิธี?

9 เม็ด 10ก 6 คน

$$\frac{14 \ 13 \ 12 \ 11 \ 10}{120}$$

$$\Rightarrow 9 \text{ stars } 5 \text{ bars} = \binom{14}{5} = \binom{14}{9} = 2002$$

คำถาม 26. กำหนดให้มีเซตของจุดบนวงกลมทั้งสิ้น n จุด (กำหนดให้ $n \geq 6$) จะสามารถเลือกลากเส้นเชื่อมเพื่อสร้างสามเหลี่ยมสองรูปจากเซตของจุดดังกล่าวได้ทั้งสิ้นกี่วิธี โดยสามเหลี่ยมทั้งสองรูปจะต้องไม่ตัดกัน และสามเหลี่ยมแต่ละรูปจะต้องมีพื้นที่มากกว่าศูนย์?

$$\binom{n}{6} \cdot 3 + \binom{n}{5} \cdot 5 + \binom{n}{4} \cdot 2$$

(PIE)

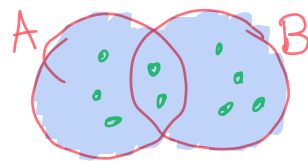
1.5 หลักการเพิ่มเข้า-ลบออก

Principle of Inclusion-Exclusion

หลักการ 27 (หลักการเพิ่มเข้า-ลบออก; Inclusion-Exclusion Principle). กำหนดให้มีเซตจำกัด A และ B แล้วจำนวนสมาชิกของเซต $A \cup B$ จะมีค่าเป็น

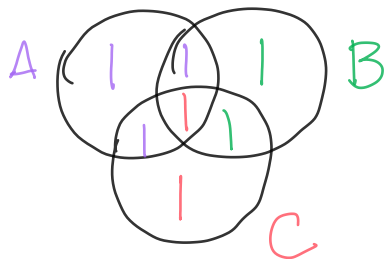
$$9 = 5 + 6 - 2$$

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$



กำหนดให้มีเซตจำกัด A, B, C แล้วจำนวนสมาชิกของเซต $A \cup B \cup C$ จะมีค่าเป็น

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$$



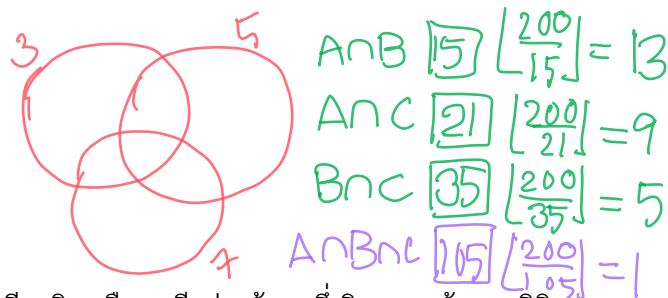
คำถาม 28. กำหนดให้เซต $S = \{1, \dots, 200\}$ จะมีกี่จำนวนในเซตนี้ที่หารด้วย 3 หรือ 5 หรือ 7 ลงตัว?

$$66 + 40 + 28 - 13 - 9 - 5 + 1 = 108$$

A = 3 ลงตัว $\lfloor \frac{200}{3} \rfloor = 66$ ตัว

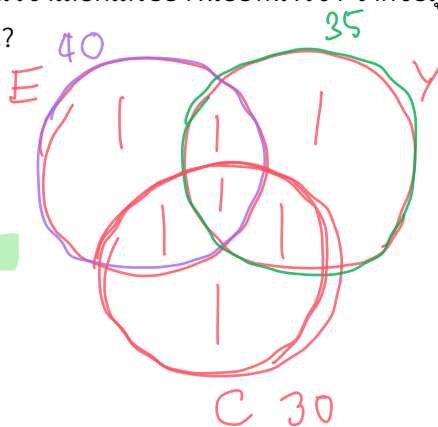
B = 5 ลงตัว $\lfloor \frac{200}{5} \rfloor = 40$ ตัว

C = 7 ลงตัว $\lfloor \frac{200}{7} \rfloor = 28$ ตัว



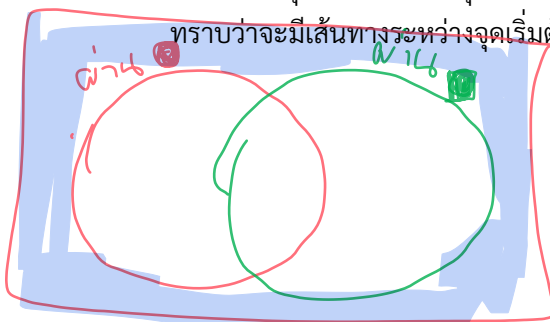
คำถาม 29. มีนักเรียนอยู่กลุ่มหนึ่ง แต่ละคนเลือกลงทะเบียนเรียนวิชาเลือกเสรีอย่างน้อยหนึ่งวิชา จากข้อมูลสถิติของการลงทะเบียนดังต่อไปนี้ จะสรุปได้ว่ามีนักเรียนในกลุ่มนี้กี่คน?

- มีนักเรียนลงทะเบียนวิชาอีสปอร์ต 40 คน
- มีนักเรียนลงทะเบียนวิชายูทูปเบอร์ 35 คน
- มีนักเรียนลงทะเบียนวิชาเทรคคริปโตฯ 30 คน
- มีนักเรียนลงทะเบียนอย่างน้อยสองวิชาจากข้างต้น 25 คน
- มีนักเรียนลงทะเบียนทั้งสามวิชาข้างต้น 20 คน

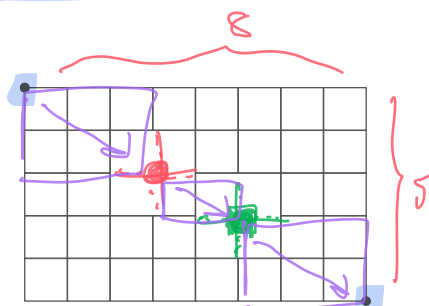


$$40 + 35 + 30 - 25 - 20 = 60$$

คำถาม 30. พิจารณาตารางต่อไปนี้ซึ่งมีความกว้าง 8 หน่วยและสูง 5 หน่วย หากต้องการเดินได้ตามขอบหรือเส้นตารางจากจุดบนซ้ายไปยังจุดล่างขวาโดยจะสามารถเดินลงด้านล่างหรือเดินไปทางขวาได้ทีละหนึ่งหน่วย อยากรู้อะไรบ้างว่ามีเส้นทางระหว่างจุดเริ่มต้นและจุดสิ้นสุดดังกล่าวทั้งสิ้นกี่เส้นทาง?

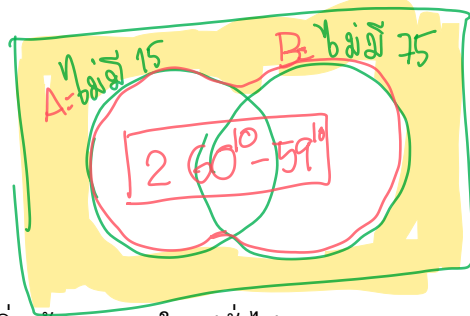


ด้าน \bullet $(5)(8)$
 ด้าน \blacksquare $(8)(5)$
 ด้าน \bullet $(5)(3)(5)$



$$\binom{13}{5} - 2 \cdot \binom{5}{2} \binom{8}{3} + \binom{5}{2} \binom{3}{1} \binom{5}{2}$$

คำถาม 31. สมมติว่ามีถุงอยู่ใบหนึ่ง บรรจุลูกบอล 100 ลูกที่มีหมายเลขกำกับจาก 1 ถึง 100 อย่างละหนึ่งลูกพอดี เราจะจับลูกบอลจากถุงใบนี้ครั้งละหนึ่งลูก เป็นจำนวน 10 ครั้ง โดยหลังจากที่หยิบลูกบอลเสร็จแต่ละครั้ง เราจะใส่ลูกบอลกลับลงไปในถุงด้วย อยากรทราบว่าเราจะจับลูกบอลได้กี่วิธี โดยที่ลูกบอลที่มีค่ามากที่สุดและน้อยที่สุดในการจับทั้ง 10 ครั้งคือ 75 และ 15 ตามลำดับ?



$$\begin{aligned}
 & \underline{\quad\quad\quad} = 61^{10} \\
 A &= \underline{60 \ 60 \ \dots \ 60} = 60^{10} \\
 B &= \underline{60 \ \dots \ 60} = 60^{10} \\
 A \cap B &= \underline{59 \ \dots \ 59} = 59^{10} \\
 & \underline{61^{10} - 2 \cdot 60^{10} + 59^{10}}
 \end{aligned}$$

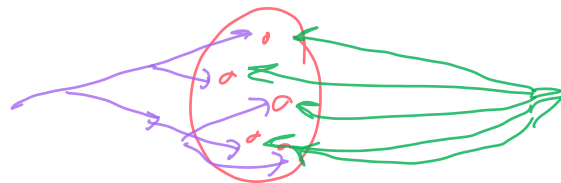
หลักการ 32 (หลักการเพิ่มเข้า-ลบออกในรูปทั่วไป; Generalized Inclusion-Exclusion Principle). กำหนดให้เซตจำกัด S_1, S_2, \dots, S_n แล้วจำนวนสมาชิกของเซต $S_1 \cup S_2 \cup \dots \cup S_n$ จะมีค่าเป็น

$$\begin{aligned}
 |S_1 \cup S_2 \cup \dots \cup S_n| &= |S_1| + |S_2| + \dots + |S_n| \\
 &\quad - |S_1 \cap S_2| - |S_1 \cap S_3| - \dots - |S_{n-1} \cap S_n| \\
 &\quad + |S_1 \cap S_2 \cap S_3| + |S_1 \cap S_2 \cap S_4| + \dots + |S_{n-2} \cap S_{n-1} \cap S_n| \\
 &\quad - \dots \\
 &\quad + (-1)^{n+1} |S_1 \cap S_2 \cap \dots \cap S_n|
 \end{aligned}$$

ข้อสังเกต 33. สังเกตว่ากฎการบวกในหัวข้อที่ 2 เป็นเพียงกรณีพิเศษของหลักการเพิ่มเข้า-ลบออก เพราะว่าส่วนร่วมของเซตอย่างน้อยสองเซตขึ้นไปจะเป็นเซตว่างซึ่งมีขนาดเท่ากับศูนย์

2 เอกลักษณะการนับและการกระจายทวินาม

2.1 หลักการนับสองทาง



หลักการนับสองทาง คือเครื่องมือในการพิสูจน์ความสมมูลกันของนิพจน์ทางคณิตศาสตร์ 2 นิพจน์ ด้วยการแสดงวิธีการนับสิ่งของอย่างเดียวกันด้วย 2 วิธีที่แตกต่างกัน

หลักการ 34 (หลักการนับสองทาง; Principle of Counting Two Ways). สองวิธีที่ใช้นับเซตเดียวกัน ย่อมให้ค่าออกมาเท่ากัน

คำถาม 35. จงแสดงว่า สำหรับจำนวนเต็มบวก n และ k ใด ๆ ซึ่ง $0 \leq k \leq n$ แล้วเอกลักษณ์ดังต่อไปนี้ถูกต้อง

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

วิธี 1 จำนวนวิธีเลือกคน k คนจากทั้งหมด n คน
 วิธีที่ 1 เลือกตรงๆ $\binom{n}{k}$ วิธี
 วิธีที่ 2 เลือก $n-k$ คน ออก ไปได้ $\binom{n}{n-k}$ วิธี
 สรุป $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$

คำถาม 36. จงแสดงว่า สำหรับจำนวนเต็มบวก n ใด ๆ เอกลักษณ์ดังต่อไปนี้ถูกต้อง

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \dots + \binom{n}{n} = 2^n$$

นับ บิตสตริง ยาว n .

วิธีที่ 1 ในแต่ละ n บิต มี 2 บิตเลือก $2 \times 2 \times \dots \times 2 = 2^n$

วิธีที่ 2 มี 1 0 ตัว $\rightarrow \binom{n}{0}$
 มี 1 1 0 ตัว $\rightarrow \binom{n}{1}$
 มี 1 1 1 0 ตัว $\rightarrow \binom{n}{2}$

$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \dots + \binom{n}{n}$

คำถาม 37. จงแสดงว่า สำหรับจำนวนเต็มบวก n ใด ๆ เอกลักษณ์ดังต่อไปนี้ถูกต้อง

$$\binom{2n}{n} = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} \binom{n}{n-i} \quad \binom{8}{4} = \binom{4}{0}\binom{4}{4} + \binom{4}{1}\binom{4}{3} + \binom{4}{2}\binom{4}{2} + \binom{4}{3}\binom{4}{1} + \binom{4}{4}\binom{4}{0}$$

คำใบ้ หนึ่งในวิธีพิสูจน์เอกลักษณ์ข้างต้นคือการนับเส้นทางที่ไปตามขอบหรือเส้นตารางขนาด $n \times n$ จากจุดบนซ้ายไปยังจุดล่างขวา (ดังรูปข้างล่าง สำหรับกรณีตัวอย่าง $n = 6$) โดยสามารถเดินลงด้านล่างหรือเดินไปทางขวาได้ที่ละหนึ่งหน่วย

วิธีที่ 1 \leftarrow \leftarrow \leftarrow \leftarrow \leftarrow \leftarrow

วิธีที่ 2 $\sum_i \binom{n}{i} \binom{n}{n-i}$

$2n$ steps $\rightarrow n$ $\downarrow n$ $\binom{2n}{n}$

monomial $2x^7$ i

binomial $x+y$

polynomial $x^3 + 3x^2 + 4x - 9$

2.2 ทฤษฎีบททวินาม

ทฤษฎีบท 38 (ทฤษฎีบททวินาม (Binomial Theorem)). ในการกระจายทวินาม $(x + y)^n$ นั้นจะประกอบไปด้วยพจน์ $x^{n-k}y^k$ ซึ่งมีค่าสัมประสิทธิ์เป็น $\binom{n}{k}$ (สำหรับแต่ละจำนวนเต็ม $k = 0, 1, 2, \dots, n$) หรือกล่าวอีกนัยหนึ่งคือสมการต่อไปนี้จริง

$$(x + y)^n = \binom{n}{0} x^n + \binom{n}{1} x^{n-1}y + \binom{n}{2} x^{n-2}y^2 + \dots + \binom{n}{n-1} xy^{n-1} + \binom{n}{n} y^n$$

สังเกตว่าสัมประสิทธิ์ทวินาม $\binom{n}{k}$ ในแต่ละพจน์จะสอดคล้องกับจำนวนวิธีที่จะเลือกตัวแปร y จำนวน k จากคู่อของ $x + y$ ทั้งหมด n คู่ได้กี่วิธี

คำถาม 39. จะมีวิธีพิสูจน์เอกลักษณ์ที่ปรากฏในคำถามที่ 36 (ดังที่แสดงข้างล่าง) โดยใช้ทฤษฎีบททวินามได้อย่างไร?

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \dots + \binom{n}{n} = 2^n$$

ใช้ท.ทวินาม set $x=1, y=1$

คำถาม 42. จงพิสูจน์ทฤษฎีบทข้างต้นโดยใช้ทฤษฎีบทที่ 13

$$\frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} + \frac{(n-1)!}{k!(n-k-1)!} = \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k-1)!} \left[\frac{1}{n-k} + \frac{1}{k} \right] = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{k}$$

$\rightarrow \frac{k+n-k}{k(n-k)} = \frac{n}{k(n-k)}$

คำถาม 43. จงแสดงว่า สำหรับจำนวนเต็มไม่ติดลบ n และ k ใด ๆ เอกลักษณ์ดังต่อไปนี้ถูกต้อง

$$\binom{n}{0} + \binom{n+1}{1} + \binom{n+2}{2} + \dots + \binom{n+k}{k} = \binom{n+k+1}{k}$$

P(k) เป็นจริง \Rightarrow P(k+1) จริง
 Case k > 0

$$\binom{n}{0} + \binom{n+1}{1} + \binom{n+2}{2} + \dots + \binom{n+k}{k} + \binom{n+(k+1)}{k+1} = \binom{n+k+1}{k} + \binom{n+k+1}{k+1}$$

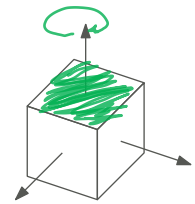
Case k = 0

$$\binom{n}{0} = 1 = \binom{n+1}{0} \# \quad \left[\binom{n+(k+1)+1}{k+1} \right] \leftarrow \text{ทล 41}$$

2.4 โจทย์ระคน 2

คำถาม 44. ลูกเต๋าหนึ่งลูก มี 6 หน้าที่แตกต่างกัน จะสามารถนำมาวางในปริภูมิสามมิติ (3-Dimensional Space) โดยที่จุดศูนย์กลางของลูกเต๋ายู่ที่จุดกำเนิด (0, 0, 0) และทุกหน้ามีระนาบที่ตั้งฉากกับแกน x, y, หรือ z ได้ทั้งหมดกี่รูปแบบ?

ลูกเต๋าลูกหนึ่งลูก
 6 หน้า
 4x
 4x
 24

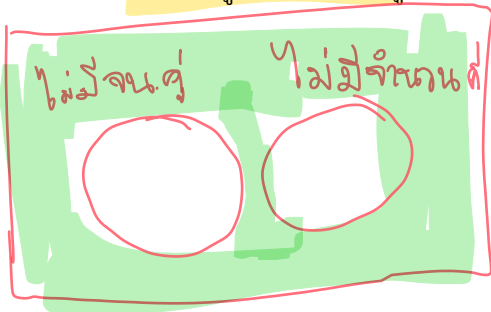


คำถาม 45. กำหนดให้มีนักเรียน 25 คนที่มีวันเกิดแตกต่างกันทั้งหมด ต้องการแบ่งนักเรียนเหล่านี้ออกเป็น 5 กลุ่ม กลุ่มละ 5 คน จากนั้นแต่ละกลุ่มจะต้องเลือกคนที่อายุน้อยที่สุดเป็นหัวหน้ากลุ่ม อยากทราบว่าจะมีวิธีการแบ่งกลุ่มนักเรียนเหล่านี้ และเลือกหัวหน้ากลุ่มตามเงื่อนไขข้างต้นได้กี่กรณี?

25!

$$\frac{25!}{5! 5! 5! 5! 5!}$$

คำถาม 46. กำหนดให้เซต $S = \{1, 2, \dots, 12\}$ จงหาจำนวนสับเซตของเซต S ดังกล่าวที่มีสมาชิก 4 ตัวโดยที่มีจำนวนคู่และจำนวนคี่อย่างน้อยอย่างละหนึ่งจำนวน



สับเซตทั้งหมด $\binom{12}{4}$

ไม่มีจำนวนคู่ $\{1, 3, 5, 7, 9, 11\}$ $\binom{6}{4}$

ไม่มีจำนวนคี่ $\{2, 4, 6, 8, 10, 12\}$ $\binom{6}{4}$

ไม่มีทั้ง 4 คู่/คี่ 0

$$\begin{array}{l} 2^{12} \\ - 2^6 \\ - 2^6 \\ + 1 \end{array} \quad \left[\binom{12}{4} - 2 \cdot \binom{6}{4} \right]$$

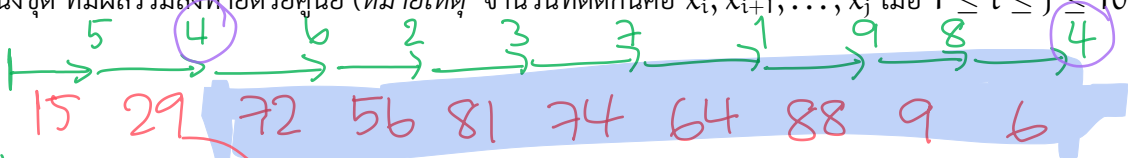
คำถาม 52. ถังใบหนึ่งมีลูกบอลบรรจุอยู่ 6 สี สีละ 100 ลูก จงหาจำนวนลูกบอลที่น้อยที่สุดที่เป็นไปได้ที่คนหนึ่งจะต้องล้วงออกมาจากถังดังกล่าว จึงจะรับประกันว่ามีลูกบอลสีหนึ่งอย่างน้อย 50 ลูก

$$\boxed{\frac{295}{6}} = \boxed{49\frac{1}{6}} = 50$$

$$\boxed{\frac{294}{6}} = \boxed{49} = 49$$

(49) (49) (49) (49) (49) (49) + 1 = $\frac{49 \times 6}{6} = 295$

คำถาม 53. กำหนดให้ x_1, x_2, \dots, x_{10} เป็นลำดับของจำนวนเต็ม จงพิสูจน์ว่าจะมีจำนวนที่อยู่ติดกันอย่างน้อยหนึ่งชุด ที่มีผลรวมลงท้ายด้วยศูนย์ (หมายเหตุ จำนวนที่ติดกันคือ x_i, x_{i+1}, \dots, x_j เมื่อ $1 \leq i \leq j \leq 10$)



กรณี 1 มีเลขลงท้าย 0.
กรณี 2 ไม่มีเลขลงท้าย 0

ให้ผลรวม $x_1 + x_2 + \dots + x_i$

pigeonhole principle

คำถาม 54. กำหนดให้ $H: \mathbb{N} \rightarrow \{0, 1\}^{256}$ เป็นฟังก์ชันแฮช (hash function) ชนิดหนึ่งที่ได้รับจำนวนเต็มไม่ติดลบเข้าไปหนึ่งจำนวน แล้วจะย่อยออกมาเป็นบิตสตริงความยาว 256 แล้วจงพิสูจน์ว่าสำหรับจำนวนเต็ม $k \geq 1$ ใด ๆ จะมีจำนวนเต็ม $x_1, x_2, \dots, x_k \in \mathbb{N}$ ที่แตกต่างกันทั้งหมดซึ่งสอดคล้องกับสมการ

$$H(x_1) = H(x_2) = \dots = H(x_k)$$

4 ลำดับและความสัมพันธ์เวียนเกิด

4.1 ลำดับเลขคณิตและลำดับเรขาคณิต

นิยาม 55 (ลำดับเลขคณิต; Arithmetic Sequence). ลำดับเลขคณิตคือลำดับ a_0, a_1, a_2, \dots ซึ่งนิยามด้วยความสัมพันธ์เวียนเกิด (recurrence relation) $a_i = a_{i-1} + c$ สำหรับ $i \geq 1$ และค่าคงตัว c

นิยาม 56 (ลำดับเรขาคณิต; Geometric Sequence). ลำดับเรขาคณิตคือลำดับ a_0, a_1, a_2, \dots ซึ่งนิยามด้วยความสัมพันธ์เวียนเกิด $a_i = r a_{i-1}$ สำหรับ $i \geq 1$ และค่าคงตัว $r \neq 0$

$$a_i = a_{i-1} + c$$

21, 20, 19, ...
15, 18, 21, 24
7, 8, 9

21, 21, 21, ...
21, 21, 21, ...

$$a_i = r a_{i-1}$$

7, 14, 28, 56
10, 40, 160, ...
50, 10, 2, ...

$a_i = \begin{cases} 2a_{i-1} & i > 0 \\ 7 & i = 0 \end{cases}$

4.2 ลำดับฟีโบนัชชี

นิยาม 57 (ลำดับฟีโบนัชชี; Fibonacci Sequence). ลำดับฟีโบนัชชีคือลำดับ F_0, F_1, F_2, \dots ซึ่งนิยามด้วยความสัมพันธ์เวียนเกิด $F_i = F_{i-2} + F_{i-1}$ สำหรับ $i \geq 2$ และมีพื้นฐานคือ $F_0 = 0, F_1 = 1$

จำนวน 40 จำนวนแรกของลำดับฟีโบนัชชีคือ

0, 1, 1, 2, 3,
5, 8, 13, 21, 34,
55, 89, 144, 233, 377,
610, 987, 1597, 2584, 4181,
6765, 10946, 17711, 28657, 46368,
75025, 121393, 196418, 317811, 514229,
832040, 1346269, 2178309, 3524578, 5702887,
9227465, 14930352, 24157817, 39088169, 63245986, ...

33
54

คำถาม 58. จงแสดงว่า สำหรับจำนวนเต็มไม่ติดลบ n ใด ๆ เอกลักษณะดังต่อไปนี้ถูกต้อง

(a) $F_0 + F_1 + \dots + F_n = F_{n+2} - 1$

(b) $F_1 + F_3 + F_5 + \dots + F_{2n-1} = F_{2n}$

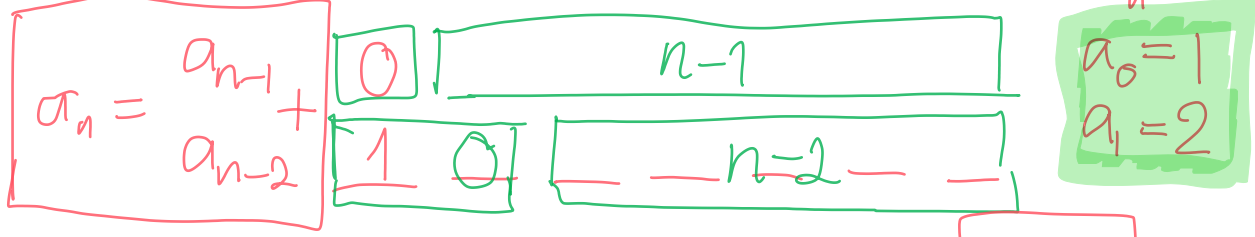
การข้าม

want \Rightarrow $P(n)$ เป็นจริง
 $P(n+1)$ เป็นจริง

Case $n \geq 1$
 $F_0 + F_1 + F_2 + \dots + F_n + F_{n+1} = F_{n+2} - 1 + F_{n+1}$
 $= F_{n+3} - 1$ โดยนิยามลำดับฟีโบนัชชี

Case $n=0$
 $F_0 = 0$ โดยนิยามลำดับฟีโบนัชชี
 $= 0 + 1 - 1$ กรณีเฉพาะ
 $= F_0 + F_1 - 1$ นิยามลำดับฟีโบนัชชี
 $= F_2 - 1$ นิยาม

คำถาม 59. บิตสตริงความยาว n ตัวที่ไม่มีเลขโดด 1 สองตัวใด ๆ อยู่ติดกันเลย มีทั้งสิ้นกี่สาย? $= a_n$



| | | | | | | | |
|-------|---|---|---|---|---|----|-----|
| | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| F_n | 0 | 1 | 1 | 2 | 3 | 5 | 8 |
| a_n | 1 | 2 | 3 | 5 | 8 | 13 | ... |

F_{n+2}

คำถาม 60. พื้นที่ขนาด $1 \times n$ หน่วย มีกระเบื้องขนาด 1×1 หน่วย และกระเบื้องขนาด 1×2 หน่วย สามารถใช้กระเบื้องปูจนเต็มพื้นที่ได้กี่วิธี



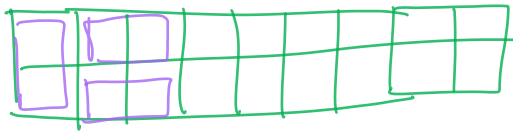
$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$$

$$a_0 = 1$$

$$a_1 = 1$$

$$F_{n+1}$$

คำถาม 61. พื้นที่ขนาด $2 \times n$ หน่วย มีกระเบื้องขนาด 1×2 หน่วย สามารถใช้กระเบื้องปูจนเต็มพื้นที่ได้กี่วิธี



$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$$

$$a_0 = 1$$

$$a_1 = 1$$

$$F_{n+1}$$

ปัญหา 62 (การค้นหาค่าจำนวนฟีโบนัชชีลำดับที่ n). กำหนดให้จำนวนเต็ม $n \in \mathbb{N}$ เป็นข้อมูลนำเข้า เราต้องการหาค่าของสมาชิกลำดับฟีโบนัชชี F_n อย่างรวดเร็ว ซึ่งกระทำได้หลายวิธี เช่น

1. **วิธีแก้สมการลักษณะเฉพาะ** เราสามารถหารูปปิดของสมาชิกลำดับฟีโบนัชชี F_n ได้ด้วยการแก้สมการลักษณะเฉพาะ (characteristic equation) จากความสัมพันธ์เวียนเกิดตามที่ปรากฏในนิยามที่ 57
สุดท้ายแล้วเราจะได้คำตอบของ F_n ที่เป็นรูปปิดดังนี้

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n \right]$$

2. **วิธียกกำลังในรูปฟังก์ชันเชิงเส้น** เราจะเขียนความสัมพันธ์เวียนเกิดของลำดับฟีโบนัชชีในรูปแบบการคูณของเมตริกซ์กับเวกเตอร์ (matrix-vector multiplication) ซึ่งเป็นฟังก์ชันเชิงเส้นแบบหนึ่งได้ดังต่อไปนี้

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_i \\ F_{i-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{i+1} \\ F_i \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} F_i \\ F_{i-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_{i-1} \\ F_{i-2} \end{bmatrix} \quad \text{เมื่อ } i \geq 2$$

ฉะนั้นเราสามารถหา $\begin{bmatrix} F_{n+1} \\ F_n \end{bmatrix}$ ได้จากการคูณเมตริกซ์ซ้ำ ๆ กันหลายครั้ง จึงได้จากสมการดังข้างล่างนี้

$$\begin{bmatrix} F_{n+1} \\ F_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^n \begin{bmatrix} F_1 \\ F_0 \end{bmatrix} \quad \text{เมื่อ } n \geq 0$$

ซึ่งการคำนวณการยกกำลังสามารถกระทำได้อย่างรวดเร็วโดยใช้เทคนิคการแบ่งแยกแล้วเอาชนะ (divide and conquer) หรือจะใช้การยกกำลังด้วยการหาคำสั่งสอง (exponentiation by repeated squaring) ก็ได้

ทั้งสองวิธีข้างต้นจะใช้เวลาประมวลผลเป็น $O(k)$ เมื่อ $k = \lceil \log_2 n \rceil$ คือจำนวนหลักของค่า n ในรูปฐานสอง เมื่อสมมติให้กระบวนการทางพีชคณิตพื้นฐาน (เช่น บวก ลบ คูณ และหาร) ใช้เวลาคงที่

- 2^0
- 2^1
- 2^2
- 2^4
- 2^8
- 2^{16}
- 2^{32}
- 2^{64}
- 2^{128}

$$A^0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^1 = A$$

$$A^2 =$$

$$A^4 =$$

$$A^8 =$$

5 การนับที่ซับซ้อนขึ้น

5.1 การเรียงสับเปลี่ยนแบบไม่อยู่ที่เดิม

ทฤษฎีบท 63 (การเรียงสับเปลี่ยนแบบไม่อยู่ที่เดิม; Derangement). มีวัตถุ n ชิ้นที่แตกต่างกัน คือ x_1, \dots, x_n และเราสามารถนำวัตถุทั้ง n ชิ้น นำมาวางเรียงเป็นลำดับ n ตำแหน่ง โดยที่ไม่มีวัตถุ x_i อยู่ในตำแหน่งที่ i ได้ D_n รูปแบบแล้ว

$$D_n = n! - \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} D_{n-k}$$

เมื่อ $n \geq 1$ โดยที่ $D_0 = 1$ และ

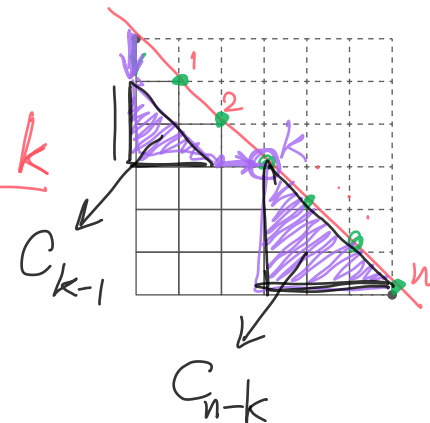
$$D_n = (n-1)(D_{n-1} + D_{n-2})$$

เมื่อ $n \geq 2$ โดยที่ $D_0 = 1$ และ $D_1 = 0$ ■

5.2 จำนวนคาตาลีอง

จำนวนคาตาลีอง (Catalan numbers) เป็นจำนวนที่พบได้ทั่วไปในปัญหาการนับเชิงคอมบินาทอริก เช่น ปัญหาการเขียนสตริงของวงเล็บ n คู่ที่จับคู่กันได้อย่างลงตัวและสมบูรณ์ (กล่าวคือวงเล็บเปิดต้องมาก่อนวงเล็บของคู่เดียวกัน และคู่วงเล็บที่เปิดทีหลังจะต้องปิดก่อน) ยังมีปัญหาการนับอื่น ๆ อีกมากมายที่มีความสัมพันธ์แบบ bijection กับปัญหาดังกล่าว เช่น ปัญหาต่อไปนี้

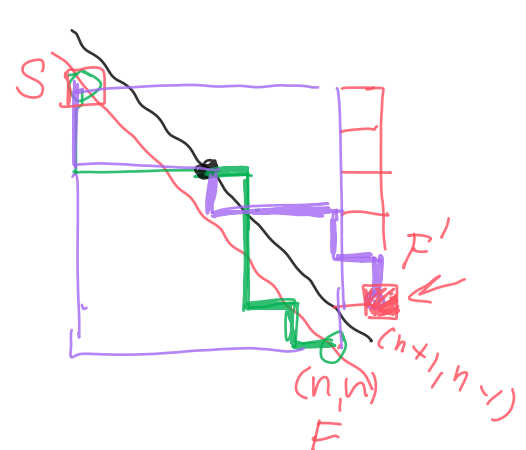
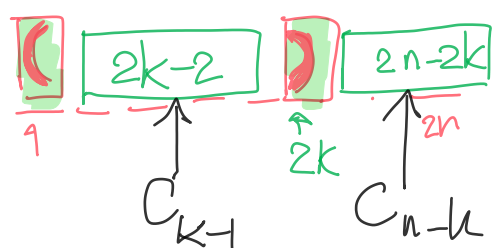
คำถาม 64. พิจารณาปัญหาดังต่อไปนี้ กำหนดให้มีตารางขนาด $n \times n$ โดยที่เส้นและขอบตารางในฝั่งครึ่งบนขวาของตารางเป็นเส้นประ และที่เหลือแสดงเป็นเส้นทึบ (ดังรูปตัวอย่างข้างล่างสำหรับกรณี $n = 6$) เราต้องการเดินจากจุดบนซ้ายสุดของตารางไปยังจุดล่างขวาสุด โดยสามารถเดินลงล่างหรือไปทางขวาได้ทีละหนึ่งหน่วย และห้ามไม่ให้เดินโดยใช้เส้นประที่กำหนดไว้ จงหาจำนวนเส้นทางระหว่างสองจุดที่กำหนดให้ $= C_n$



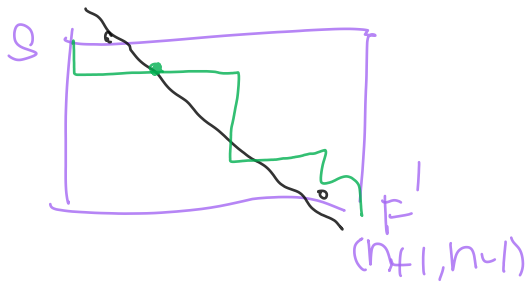
ล้มนทุกกลับมาเสมอ / ครั้งแรกที่จุดที่ k
ทำได้ $C_{k-1} C_{n-k}$

$$C_n = \begin{cases} \sum_{k=1}^n C_{k-1} C_{n-k} & n > 0 \\ 1 & n = 0 \end{cases}$$

$$C_n = \underbrace{((\quad) (\quad)) (\quad) (\quad)}_{2n}$$



$$\begin{aligned} C_n &= \binom{2n}{n} - \binom{2n}{n-1} = \binom{2n}{n} - \frac{(2n)!}{(n-1)!(n+1)!} \\ &= [S \rightarrow F \text{ ในเสี้ยว}] \\ &= [S \rightarrow F'] \\ &= \binom{2n}{n} - \frac{n}{n+1} \binom{2n}{n} \\ &= \left(1 - \frac{n}{n+1}\right) \binom{2n}{n} \\ &= \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n} \end{aligned}$$



หัวข้อเพิ่มเติม

หัวข้อดังต่อไปนี้เกี่ยวข้องกับการนับ แต่ไม่ได้ครอบคลุมอยู่ในหลักสูตรโอลิมปิกวิชาการคอมพิวเตอร์

- สเตอริลิ่งชนิดที่หนึ่งและสอง (Stirling numbers of first and second kind)
- การนับ 12 กระบวนท่าของโรตา (Rota's twelvefold way)
- การแก้ความสัมพันธ์เวียนเกิดด้วยการแก้สมการลักษณะเฉพาะ (characteristic equation)
- การนับด้วยการใช้ฟังก์ชันก่อกำเนิด (generating function)
- ทฤษฎีการนับของเบิร์นไซด์ (Burnside's counting theorem หรือ Cauchy–Frobenius lemma)

เอกสารอ้างอิง

[LLM10] Eric Lehman, F Thomson Leighton, and Albert R Meyer. Mathematics for Computer Science, 2010. Revised Tuesday 6th June 2018.

[LPV00] László Lovász, József Pelikán, and Katalin Vesztegombi. Discrete Maths: Elementary and Beyond, 2000.

[Wes15] Douglas West. Combinatorial Mathematics: Fall 2015 Edition, 2015.