Induction

Saturday, October 7, 2023 09:38

อุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ (Induction)

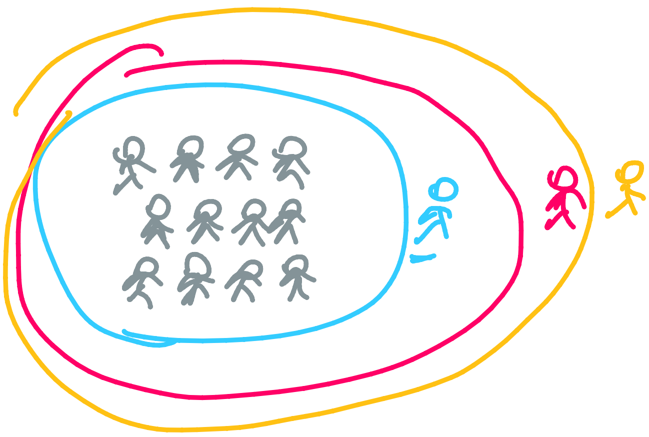
Base Cases : $P(0)$ จริง

Induction Hypothesis

Inductive step : $\forall k \geq 0 \quad \boxed{P(k)} \rightarrow P(k+1)$

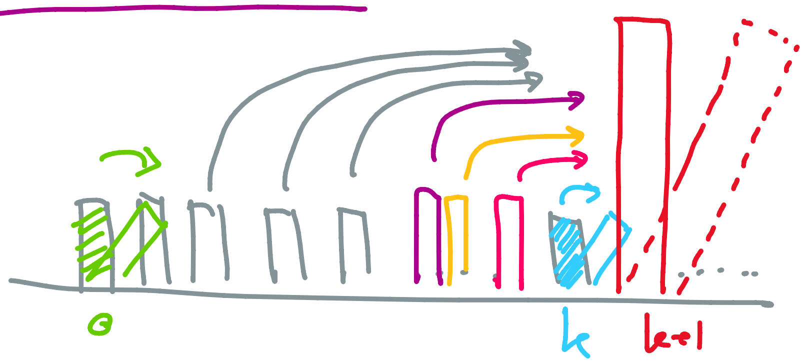
$\therefore \forall n \geq 0 \quad P(n)$ จริง

$P(0)$	$P(1)$	$P(n)$	
$P(0) \rightarrow P(1)$	$P(1) \rightarrow P(2)$	$P(2) \rightarrow P(3)$	...
$\therefore P(1)$	$\therefore P(2)$	$\therefore P(3)$	...



Strong Math Induction

Strong Math Induction



Base Cases: $P(0)$ จริง

Inductive step: $\forall k \geq 0 \quad P(0) \land P(1) \land P(2) \land P(3) \land \ldots \land P(k) \rightarrow P(k+1)$

$\therefore \forall n \geq 0 \quad P(n)$ จริง

Saturday, October 7, 2023 09:55

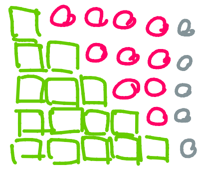
จงแสดงว่า $\forall n \in \mathbb{Z}, n \geq 1$

$\exists, \forall$ ชนิดของจำนวนเต็ม

$$\sum_{i=1}^{n} i = 1+2+3+\dots+n = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\underbrace{\begin{array}{cccccc} 1+ & 2+ & 3+ & \dots & +99 & +100 \\ 100 & 99 & 98 & & 2 & 1 \\ \hline 101 & 101 & 101 & \dots & 101 & 101 \end{array}}_{100 \text{ พจน์}}$$

$$\frac{101 \times 100}{2}$$



$[1-5][1-4] = 5^2$

$[1-5][1-5] = 5 \times 6$

จงแสดงว่า $1+2+3+\dots+n = \frac{n(n+1)}{2}$ $\forall n \geq 1$

พิสูจน์ ให้ $P(n)$ แทน " $1+2+3+\dots+n = \frac{n(n+1)}{2}$ "

LHS RHS

- เมื่อ $n=1$ $\quad 1 = \frac{1 \times (1+1)}{2} = 1$ $\quad \therefore P(1)$ จริง
- สมมติ $P(k)$ จริง ทุก $k \geq 1$ คือ

$$1+2+3+\dots+k = \frac{k(k+1)}{2}$$

$$1+2+3+\dots+k+(k+1) = \frac{k(k+1)}{2} + (k+1)$$

$$= (k+1)\left[\frac{k}{2}+1\right] = \frac{(k+1)(k+2)}{2}$$

$$= \frac{(k+1)(k+1+1)}{2}$$

Goal $\therefore P(k+1)$ จริง

$\therefore \forall k \geq 1 \quad P(k) \rightarrow P(k+1)$

$\therefore \forall n \geq 1 \quad P(n)$ จริง คือ $1+2+3+\dots+n = \frac{n(n+1)}{2}$ #

ผลบวก n จำนวนแรก $\quad 1+2+3+\dots+n = \frac{n(n+1)}{2}$

ผลบวกเลขคี่ n จำนวนแรก $= n^2$

$1^2 = 1 = 1$ $\qquad 1+3+5+\dots+(2n-1) = n^2$

2^2

$1^2 = 1 = 1$
$2^2 = 4 = 1+3$
$3^2 = 9 = 1+3+5$
$4^2 = 16 = 1+3+5+7$
$5^2 = 25 = 1+3+5+7+9$
$6^2 = 36 = 1+3+5+7+9+11$

$1+3+5+\dots+(2n-1) = n$

ตัวที่ n

$a_n = a_{n-1} + (2n-1)$
และ $a_1 = 1$

จะแสดงว่า $1+3+5+\dots+(2n-1) = n^2$

พิสูจน์ ให้ $P(n)$ แทน $1+3+5+\dots+(2n-1) = n^2$

Base Cases เมื่อ $n=1$, $1 = 1^2$ $\therefore P(1)$ จริง

Inductive Step สมมติว่า $P(k)$ จริง, $\forall k \geq 1$ [Goal แสดง $P(k+1)$]

$P(k)$ จริง คือ $1+3+5+\dots+(2k-1) = k^2$

$1+3+5+\dots+(2k-1)+(2k+1) = \underbrace{k^2+(2k+1)}$

$1+3+5+\dots+(2k-1)+(2k+1) = (k+1)^2$

$\therefore P(k+1)$ จริง

$\therefore P(k) \rightarrow P(k+1) \quad \forall k \geq 1$

$\therefore \forall n \geq 1$, $1+3+5+\dots+(2n-1) = n^2$ จริง *

จะแสดงว่า

$$1\cdot2 + 2\cdot3 + 3\cdot4 + 4\cdot5 + \dots + n(n+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$$

พิสูจน์ ให้ $P(n)$ แทน

เมื่อ $n=1$, LHS $1\cdot2 = $ RHS $\frac{1\cdot2\cdot3}{3} = 2$ $\therefore P(1)$ จริง

สมมติ $P(k-1)$ จริง $\forall k \geq 2$ [จะแสดง $P(k)$]

$$1\cdot2 + 2\cdot3 + 3\cdot4 + 4\cdot5 + \dots + (k-1)(k) = \frac{(k-1)(k)(k+1)}{3}$$

$$1\cdot2 + 2\cdot3 + 3\cdot4 + 4\cdot5 + \dots + (k-1)(k) + (k)(k+1)$$

$$= \frac{(k-1)(k)(k+1)}{3} + k(k+1)$$

$$= k(k+1)\left[\frac{k-1+3}{3}\right] = \frac{k(k+1)(k+2)}{3}$$

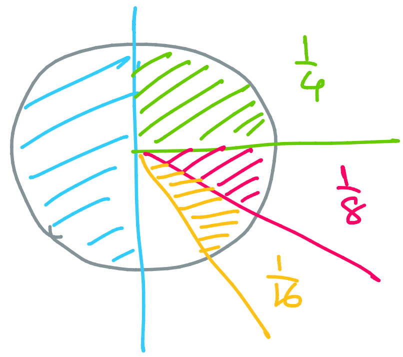
$\therefore P(k)$ จริง

$\therefore P(k-1) \to P(k)$ จริง $\forall k-1 \geq 1$

$\therefore \forall n \geq 1 \quad 1\cdot 2 + 2\cdot 3 + 3\cdot 4 + \dots + (n)(n+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$ จริง #

จงแสดงว่า $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{2^n} = 2 - \frac{1}{2^n}$

$1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^n = 2^{n+1} - 1$



พิสูจน์ ให้ $P(n)$ แทน

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}} + \frac{1}{2^n} = 2 - \frac{1}{2^n}$$

เมื่อ $n = 1$, $\quad 1 + \frac{1}{2} = 2 - \frac{1}{2} \quad \therefore P(1)$ จริง

สมมติ $P(k)$ จริง $\forall k \geq 1$ จะได้

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2^{k-1}} + \frac{1}{2^k} = 2 - \frac{1}{2^k}$$

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2^{k-1}} + \frac{1}{2^k} + \frac{1}{2^{k+1}} = 2 - \frac{1}{2^k} + \frac{1}{2^{k+1}}$$

$$= 2 - \frac{2-1}{2^{k+1}} = 2 - \frac{1}{2^{k+1}}$$

$\therefore P(k+1)$ จริง

$\therefore P(k) \to P(k+1) \quad \forall k \geq 1$

$$\therefore \forall n \quad 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2^n} = 2 - \frac{1}{2^n} \qquad \#$$

$$1 + 2 + 3 + 4 + \dots + (n-1) + n$$

لما $n = n+1$ $\qquad 2 + 3 + 4 + \dots + (n-1) + n + (n+1) \quad \dots \quad a_{n+1}$

لما $n = n$ $\qquad 1 + 2 + 3 + 4 + \dots + (n-1) + n \quad \dots \quad a_n$

$$-1 \qquad\qquad +(n+1) \quad \dots \quad a_{n+1} - a_n$$

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}} + \frac{1}{2^n}$$

$$S \rightarrow 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}} + \frac{1}{2^n}$$

$$\frac{1}{2}S \rightarrow \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^{n+1}}$$

$$S - \frac{1}{2}S \rightarrow 1 - \frac{1}{2^{n+1}}$$

$$\frac{1}{2}S \rightarrow 1 - \frac{1}{2^{n+1}}$$

$$\therefore S = 2 - \frac{1}{2^n}$$

$$1\cdot 2 + 2\cdot 3 + 3\cdot 4 + \dots + (n-1)(n) + n(n+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$$

$$\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \dots + \frac{1}{(n-1)(n)} + \frac{1}{n(n+1)} = 1 - \frac{1}{n+1}$$

$$1\cdot 2 + 2\cdot 3 + 3\cdot 4 + 4\cdot 5 + 5\cdot 6 + 6\cdot 7 + \dots$$

$$1\cdot 2 + 2\cdot 3 + 3\cdot 4 + 4\cdot 5 + 5\cdot 6 + 6\cdot 7 + \dots$$

$$3-1 = 2 \qquad 4-2 = 2 \qquad 5-3 = 2 \qquad 6-4 = 2$$

$$2\cdot 3 \qquad 2\cdot 4 \qquad 2\cdot 5 \qquad 2\cdot 6$$

$$2[3+4+5+\dots\dots\dots+n]$$

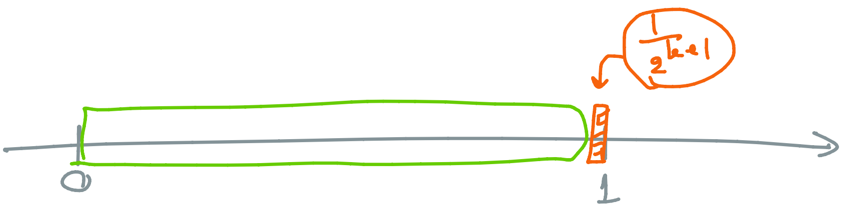
จงแสดงว่า

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\dots+\frac{1}{2^n} < 1$$

พิสูจน์ ให้ $P(n)$ แสดง $P(1)$ จริง

สมมติ $P(k) \Rightarrow P(k+1)$ $\boxed{\le 1-\frac{1}{2^k}}$

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\dots+\frac{1}{2^k} < 1$$



$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\dots+\frac{1}{2^k}+\frac{1}{2^{k+1}} < 1 + \cancel{\frac{1}{2^{k+1}} < 1}$$

ทำไม่ได้

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\dots+\frac{1}{2^k}) < 1$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\dots+\frac{1}{2^k}\right) < \frac{1}{2}\times 1$$

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\dots+\frac{1}{2^{k+1}} < \frac{1}{2}+\frac{1}{2}$$

$\therefore$ $P(k+1)$ จริง

$\therefore P(k) \to P(k+1)$ จริง $\forall k \geq 1$

$\therefore \forall n \geq 1 \quad P(n)$ จริง #

ผลบวก แถวที่ n มีค่า n^3 ???

$$1 = 1 = 1^3$$

$$3 + 5 = 8 = 2^3$$

$$7 + 9 + 11 = 27 = 3^3$$

$$13 + 15 + 17 + 19 = 64 = 4^3$$

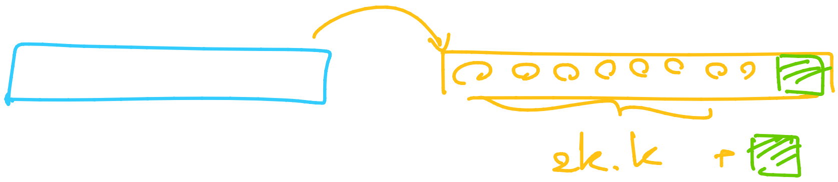
$P(k)$: $21 + 23 + 25 + 27 + 29 = 5^3$

ตัวที่ $\sum_{i=1}^{k} i = \frac{k(k+1)}{2}$

$2k \quad 2k \quad 2k \quad 2k \quad 2k$

$P(k+1)$: $\underbrace{31 \quad 33 \quad 35 \quad 37 \quad 39}_{k} \quad 31$

มี $k+1$ ตัว

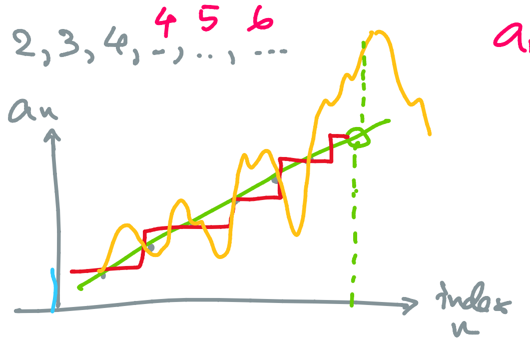


Sequences

Saturday, October 7, 2023 10:11

1, 2, 3, 4, 4, 5, 6, …

$a_n = \lceil 0.8\ n \rceil$



		Absolute Form	Recursive Form (อาจมีหลายแบบ)
1.	$i=1$: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 …	$a_n = n$	$a_n = a_{n-1} + 1 \quad ; a_1 = 1$
2.	1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15 …	$a_n = 2n-1$	$a_n = a_{n-1} + 2 \quad ; a_1 = 1$
3.	2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16 …	$a_n = 2n$	$a_n = a_{n-1} + 2 \quad ; a_1 = 2$
4.	2, 4, 8, 16, 32, 64, 128 …	$a_n = 2^n$	$a_n = 2a_{n-1} \quad ; a_1 = 2$
5.	1, 4, 9, 16, 25, 36, 49 …	$a_n = n^2$	$a_n = a_{n-1} + 2n - 1 ; a_1 = 1$
6.	2, 5, 10, 17, 26, 37, 50 …	$a_n = n^2+1$	$a_n = a_{n-1} + 2n - 1 ; a_1 = 2$
7.	1, 11, 111, 1111, 11111, 111111 …	$a_n =$ 1 n ตัว	$a_n = 10 \cdot a_{n-1} + 1 \quad ; a_1 = 1$ $= 10^{n-1} + a_{n-1} \quad ; a_1 = 1$
8.	1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21 …	$a_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]$	

Fibonacci

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2} \quad \text{และ } F_1 = F_2 = 1$$

การหารลงตัว

น้อย x หาร y มาก ลงตัว

(y หารด้วย x ลงตัว) เขียนแทนด้วย $x \mid y$

สัญลักษณ์

$\exists k \in \mathbb{Z}$ ที่ $y = x \cdot k$

เลขคู่ (หาร 2 ลงตัว)

$2 \mid x \iff \exists k \in \mathbb{Z} \quad x = 2k$

ตย. $2 \mid 100 \quad \because 100 = 2 \cdot 50$

$2 \mid 30 \quad \because 30 = 2 \cdot 15$

เลขคี่ (หาร 2 ไม่ลงตัว)

$2 \nmid x \iff \neg(\exists k \in \mathbb{Z} \quad x = 2k)$

$2 \nmid x \iff \forall k \in \mathbb{Z} \quad x \neq 2k$

ตย. $2 \nmid 11 \quad \because 11 \neq 2 \cdot 5 \neq 2 \cdot 1 \neq 2 \cdot 2 \neq 2 \cdot 3$

$11 \neq 2 \cdot 6 \neq 2 \cdot 7 \neq 2 \cdot 8 \neq \dots$

$2 \nmid x \iff \exists k \in \mathbb{Z} \quad x = 2k+1$

สรุป

$2 \mid x \iff \exists k \in \mathbb{Z} \quad x = 2k$

$2 \nmid x \iff \exists k \in \mathbb{Z} \quad x = 2k+1$

$x \mid y \iff \exists k \in \mathbb{Z} \quad y = x \cdot k$

$x \nmid y \iff \exists k \in \mathbb{Z}, \exists r \in \mathbb{Z} \quad y = x \cdot k + r$ เศษ

$0 < r < x$

โจทย์

โจทย์

$$10 \mid x-y \longrightarrow 10 \mid x^n - y^n$$

			Math Induction
เหตุ	ยกตัวอย่าง $P(x_0)$	ให้ a ไม่เฉพาะเจาะจง แสดงว่า $P(a)$ จริง	ไล่ทุกกรณี $P(0) \wedge P(1) \wedge P(2) \wedge \dots \wedge P(10) \wedge \dots$
ผล	$\therefore \exists x\, P(x)$	$\therefore \forall n\, P(n)$	$\therefore \forall n\, P(n)$

Saturday, October 7, 2023 13:01

สำหรับ จำนวนเต็ม x, y ใดๆ จงแสดงว่า

$$7 \mid x-y \longrightarrow 7 \mid x^n - y^n \quad \forall n \geq 0$$

พิสูจน์ ให้ x, y เป็นจำนวนเต็มใดๆ และ $\boxed{7 \mid x-y}$ *

[Goal : แสดงว่า $7 \mid x^n - y^n \quad \forall n \geq 0$]

ให้ $P(n)$ แทน $7 \mid x^n - y^n$

Base Case เมื่อ $n=0$ $x^0 - y^0 = 1-1 = 0$

$\therefore$ $7 \mid x^0 - y^0$ จริง $\therefore P(0)$ จริง

[optional] เมื่อ $n=1$

$7 \mid x-y$ จริง จาก * $\therefore P(1)$ จริง

Inductive Step

สมมติ $7 \mid x^k - y^k$ สำหรับทุก $k \geq 0$

[Goal : ต้องแสดงว่า $7 \mid x^{k+1} - y^{k+1}$]

จาก

$$(x+y)(x^k - y^k) = x^{k+1} - y^{k+1} + \cancel{x^k y} - \cancel{x y^k}$$

$$(x-y)(x^k + y^k) = x^{k+1} - y^{k+1} - \cancel{x^k y} + \cancel{x y^k}$$

+

$$(x+y)\underbrace{(x^k - y^k)}_{7 \text{ หารลง}} + \underbrace{(x-y)}_{7 \text{ หารลง}}(x^k + y^k) = \underbrace{2(x^{k+1} - y^{k+1})}_{7 \text{ หารลง}}$$

$\exists a, b$

$$7a(x+y) + 7b(x^k + y^k) = 2(x^{k+1} - y^{k+1})$$

จะได้ $7a(x-y) + 7b(x^k - y^k) = 2(x^{k+1} - y^{k+1})$

$$7[a(x-y)+b(x^k-y^k)] = 2(x^{k+1}-y^{k+1})$$

$\because 7 \nmid 2 \quad \therefore 7 \mid (x^{k+1} - y^{k+1})$ $\quad \therefore P(k+1)$ จริง

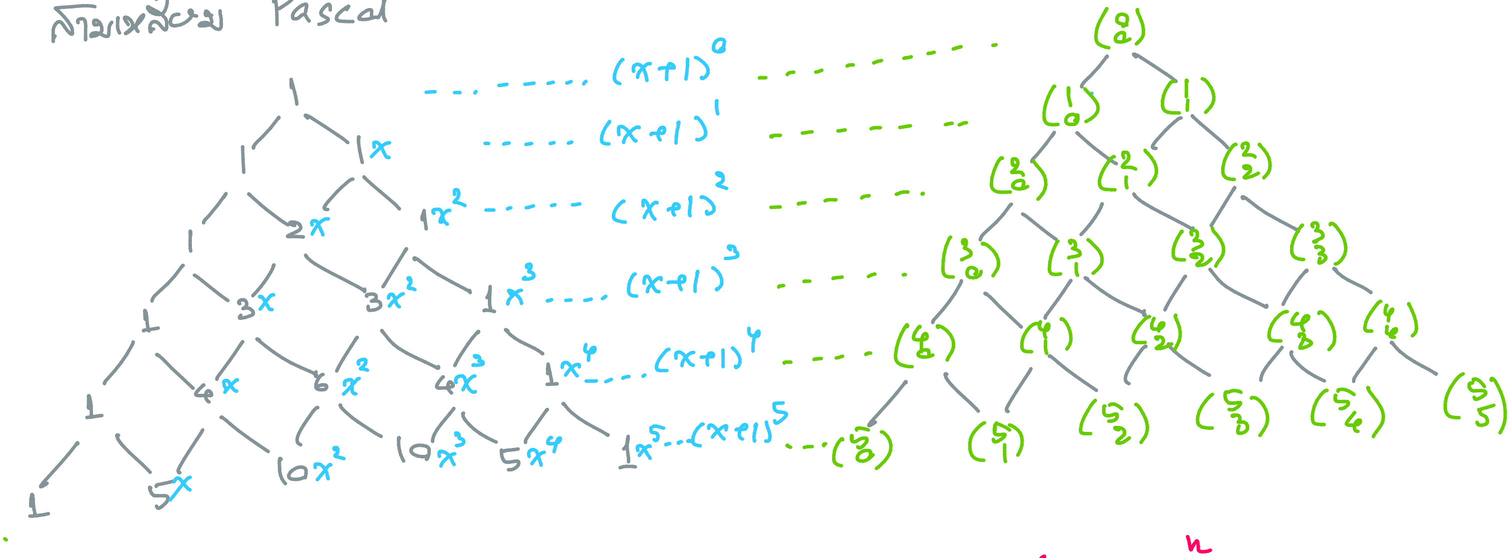
$\therefore \forall k \geq 0 \quad P(k) \rightarrow P(k+1)$

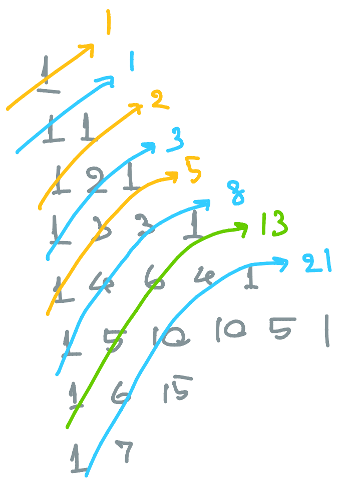
$\therefore \forall n \geq 0 \quad P(n)$ จริง

$\therefore \quad 7 \mid x-y \longrightarrow 7 \mid x^n - y^n \quad \forall n \geq 0, \forall x,y$ #

Saturday, October 7, 2023 13:26

สามเหลี่ยม Pascal



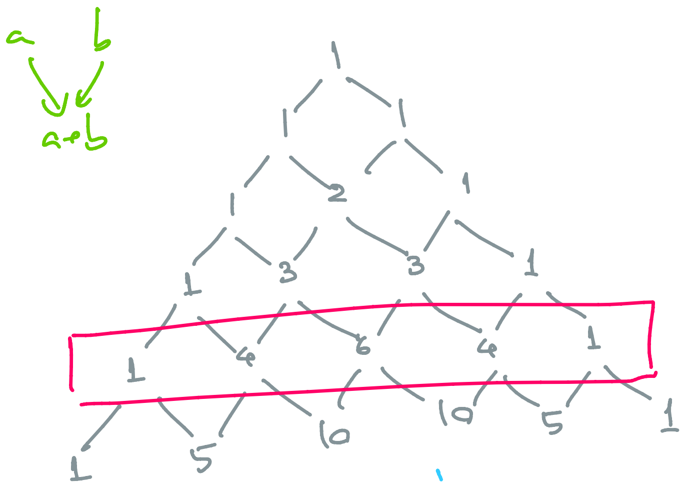


$$\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\dots+\binom{n}{n}=2^n$$

$$1+2+3+\dots+n=\binom{n+1}{2}=\frac{(n+1)(n)}{2}$$

$$\binom{n}{k}=\binom{n-1}{k}+\binom{n-1}{k-1}$$

$$\binom{n}{k}=\binom{n}{n-k}$$



จะแสดงว่า แถวที่ n มีผลบวก เป็น 2^n

พิสูจน์ แถวที่ 0 ผลบวก $=1=2^0$

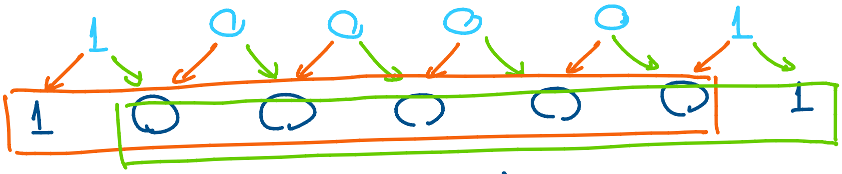
สมมติ ผลบวกแถวที่ k คือ 2^k

ต้องแสดงแถวที่ $k+1$

ข้อสังเกต...

แถวที่ k

แถวที่ k+1



∴ แถวที่ k+1 เป็น 2 เท่าของแถวที่ k

∴ ดังนั้น ผลบวกแถวที่ k+1 คือ $2^k + 2^k = 2^{k+1}$

∴ ผลบวกแถวที่ n จึงเท่ากับ 2^n, $n \geq 0$ #

Fibonacci Numbers

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2} \qquad \text{โดย } F_1 = F_2 = 1$$

จงแสดงว่า $F_n \leq 2^n$

พิสูจน์ ให้ $P(n)$ แทน $F_n \leq 2^n$

เมื่อ $n = 1$, $F_1 = 1 \leq 2^1$ ∴ $P(1)$ จริง

[Optional] เมื่อ $n = 2$, $F_2 = 1 \leq 2^2$ ∴ $P(2)$ จริง

สมมติ $P(k)$ จริง $\forall k \geq 1$ [Goal: จะแสดง $P(k+1)$]

∴ $P(k)$ จริง ได้ว่า $F_k \leq 2^k$

เนื่องจาก $F_k = F_{k-1} + F_{k-2}$ และ $F_{k-2} \geq 0$

∴ $F_k \geq F_{k-1}$

$$F_{k+1} = F_k + F_{k-1} \leq F_k + F_k \leq 2^k + 2^k$$

∴ $F_{k+1} \leq 2^{k+1}$ .... ∴ $P(k+1)$ จริง

∴ $P(k) \rightarrow P(k+1)$ $\forall k \geq 0$

∴ $\forall n \geq 0$ $P(n)$ จริง คือ $F_n \leq 2^n$ #

Wrong Prove

Saturday, October 7, 2023 14:01

จงแสดงว่า

$$1+2+3+\dots+n = \frac{(n+4)(n-3)}{2}$$

พิสูจน์ ให้ $P(n)$ แทน $1+2+3+\dots+n = \frac{(n+4)(n-3)}{2}$

~~Base Case~~

Inductive Step สมมติ $P(k)$ จริง $\forall k \geq 1$

$$1+2+3+\dots+k = \frac{(k+4)(k-3)}{2}$$

$$1+2+3+\dots+k+(k+1) = \frac{(k+4)(k-3)}{2} + (k+1)$$

$$= \frac{k^2+k-12+2k+2}{2}$$

$$= \frac{k^2+3k-10}{2} = \frac{(k+5)(k-2)}{2}$$

$$1+2+3+\dots+k+(k+1) = \frac{((k+1)+4)((k+1)-3)}{2}$$

$\therefore P(k+1)$ จริง

$\therefore P(k) \rightarrow P(k+1) \quad \forall k \geq 1$

~~$\therefore \forall n \geq 1 \quad P(n)$ จริง~~ ×

#

จงแสดงว่า สำหรับ a ใดๆ

$$a^n = 0 \qquad \forall n \geq 0$$

พิสูจน์ ~~Base Case~~

Inductive สมมติ $a^k = 0$

$$a^{k+1} = a^k \cdot a = 0 \cdot a = 0$$

$\therefore P(k+1)$ จริง

$\therefore P(k) \to P(k+1) \quad \forall k \geq 1$

~~$\therefore \forall n \geq 0 \quad P(n)$ จริง~~ $\times$ #.

จงแสดงว่า สำหรับ a ใดๆ

$a^n = 1 \quad \forall n \geq 0$

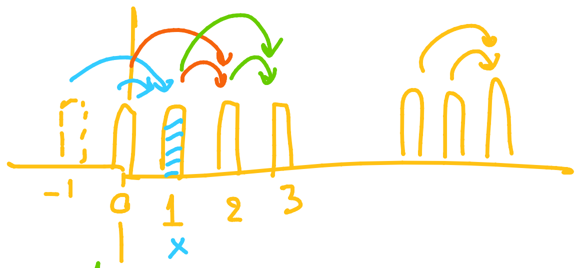
ขั้นต้น $n=0$, $a^0 = 1$

สมมติ $a^k = 1 \quad \forall k \in \{0,1,2,3,\ldots\}$

[จงแสดงว่า $a^{k+1} = 1$]

$k+1 = k + k - (k-1)$

$$a^{k+1} = \frac{\cancel{a^k}^{1} \cdot \cancel{a^k}^{1}}{\cancel{a^{k-1}}^{1}} = \frac{1 \cdot 1}{1} = 1$$



ไม่จริง เมื่อ $k+1 = 1$

a^0 ✓ a^{-1} $\times$

$\therefore P(k+1)$ จริง

$\therefore \forall n \geq 0 \quad a^n = 1$ #

Saturday, October 7, 2023 14:16

Foundation of Arithematic

จำนวนเต็มบวกใดๆ ≥ 2 สามารถเขียนในรูป
ผลคูณจำนวนเฉพาะได้ เสมอ
(และเขียนได้แบบเดียวเท่านั้น)

เช่น
$101 = 101$
$100 = 2 \times 2 \times 5 \times 5$
$99 = 3 \times 3 \times 11$
$98 = 2 \times 7 \times 7$

พิสูจน์ ให้ $P(n)$ แทน
" n เป็นในรูปผลคูณจำนวนเฉพาะได้ "

เมื่อ $n=2$ $\qquad$ $\underbrace{2}_{\text{จำนวนเฉพาะ}} = 2$ $\qquad$ $\therefore P(2)$ จริง

สมมติ $P(2) \wedge P(3) \wedge P(4) \wedge \dots \wedge P(k-2) \wedge P(k-1) \wedge P(k)$ จริง

[Goal: จะแสดง $P(k+1)$]

พิจารณา $x = k+1$

กรณี 1: x เป็นจำนวนเฉพาะ $\qquad \therefore P(x)$ จริง

กรณี 2: x เป็นจำนวนประกอบ

ดังนั้น จะมี $\exists a \in \mathbb{Z}$ ที่ $\quad a \mid x$

ที่ $1 < a < x$ หรือ $\boxed{2 \leq a \leq x-1}$

$\because a \mid x \quad \therefore \exists b \in \mathbb{Z} \quad x = a \cdot b$

$\because 2 \leq a \leq x-1 \quad \therefore b \neq 1$ และ $b \neq x$

$\therefore \boxed{2 \leq b \leq x-1}$

$x-1=k$

$2 \leq a \leq k \qquad \therefore P(a)$ จริง $\qquad x = a \cdot b$

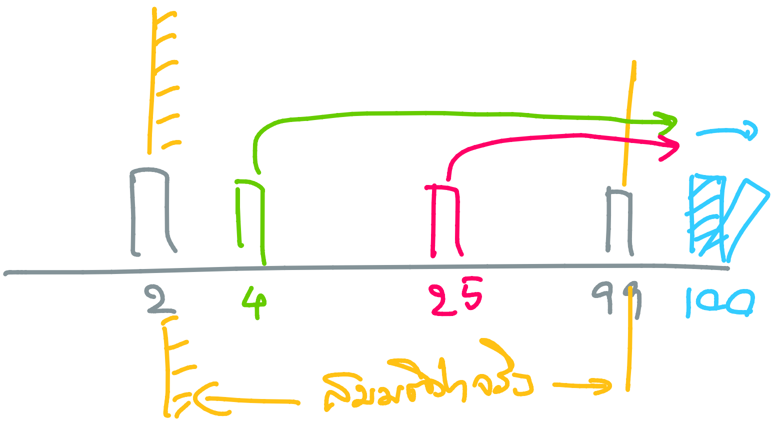
$2 \leq b \leq k \qquad \therefore P(b)$ จริง $\qquad x = p_1 p_2 \cdots p_l \cdot p_1' p_2' \cdots p_m'$

$2 \leq a \leq k$ $\therefore P(a)$ จริง

$2 \leq b \leq k$ $\therefore P(b)$ จริง $x = p_1 p_2 \cdots p_l \cdot p_1' p_2' \cdots p_m'$

$\therefore x$ เขียนในรูปผลคูณของจำนวนเฉพาะได้ เช่นกัน

$\therefore \forall n \geq 2$ $P(n)$ จริง #



Saturday, October 7, 2023 14:48

จะแสดงว่า $F_n \le 2^n$

เมื่อ $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ และ $F_1 = F_2 = 1$

พิสูจน์ ให้ $P(n)$ แทน " $F_n \le 2^n$ "

เมื่อ $n=1$ $F_1 = 1 \le 2^1$ $\therefore P(1)$ จริง

และ $n=2$ $F_2 = 2 \le 2^2$ $\therefore P(2)$ จริง

สมมติ $P(1) \land P(2) \land P(3) \land P(4) \land \ldots \land P(n)$ จริง

[จะแสดง $P(n+1)$]

จาก $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$

$\because P(n)$ จริง $\downarrow$ $\downarrow$ $\because P(n-1)$ จริง

$F_{n+1} \le 2^n + 2^{n-1}$

$\therefore F_{n+1} \le 2^n + 2^n = 2^{n+1}$

$\therefore P(n+1)$ จริง

$\therefore P(n) \rightarrow P(n+1) \ \forall n \ge 1$

$\therefore \forall n \ge 1 \ P(n)$ #

จะแสดงว่า $a \mid x-y \Rightarrow a \mid x^n - y^n$

สำหรับ a, x, y ใดๆ และ $n \ge 0$

พิสูจน์ ให้ a, x, y เป็นจำนวนเต็มใดๆ

และ $\boxed{a \mid x^n - y^n}$ *

ให้ P

ให้ $P(n)$ แทน $a \mid x^n - y^n$

เมื่อ $n=0$, $a \mid 0$ $\therefore a \mid x^0 - y^0$ $\therefore P(0)$ จริง

เมื่อ $n=1$, $a \mid x-y$ จาก * $\therefore P(1)$ จริง

<u>สมมติ</u> $P(0) \wedge P(1) \wedge P(2) \wedge P(3) \wedge \dots \wedge P(k-1) \wedge P(k)$ จริง

พิจารณา $x^{k+1} - y^{k+1}$

$$= (x^k - y^k)(x+y) - x^k y + x y^k$$

$$= (x^k - y^k)(x+y) - xy(x^{k-1} - y^{k-1})$$

$\because P(k)$ จริง $\qquad \because P(k-1)$ จริง

$$= a \cdot b(x+y) - a \cdot c \cdot xy$$

$$= a\big(b(x+y) - cxy\big)$$

$\because b, c, x, y \in \mathbb{Z}$ $\therefore b(x+y) - cxy \in \mathbb{Z}$

$\therefore a \mid x^{k+1} - y^{k+1}$

Saturday, October 7, 2023 15:04

จงแสดงว่า ทุกจำนวนเต็มตั้งแต่ 8 สามารถเขียนในรูป

$$3x+5y \quad \exists\, x,y \in \mathbb{Z}_0^+$$

ตัวอย่าง $30 = 3\times5 + 5\times3$, 3×10 , 5×6

$40 = 3\times10 + 5\times2$

$100 = 3\times10 + 5\times14$

$103 = 100 + 3$

$104 = 101 + 3$

พิสูจน์ ให้ $P(n)$ แทน " n เขียนในรูป $3x+5y$ ได้ "

Base Cases $n=8$ $8 = 3+5$ $\therefore P(8)$ จริง

$n=9$ $9 = 3+3+3$ $\therefore P(9)$ จริง

$n=10$ $10 = 5+5$ $\therefore P(10)$ จริง

Inductive Step

สมมติ $P(8) \wedge P(9) \wedge P(10) \wedge P(11) \wedge \dots\dots \wedge P(k-1)$ จริง

[Goal : แสดง $P(k)$]

พิจารณา $k = k-3 + 3$

$\because P(k-3)$ จริง

$\therefore k-3 = 3x' + 3y'$ ได้ $\exists x',y' \in \mathbb{Z}_0$

$\therefore k = 3(x'+1) + 3y'$ $\therefore P(k)$ จริง

$\therefore$ ทุก n , $n \geq 8$ n เขียนในรูป $3x+5y$ ได้ เสมอ #

Wrong Proof

Saturday, October 7, 2023 15:18

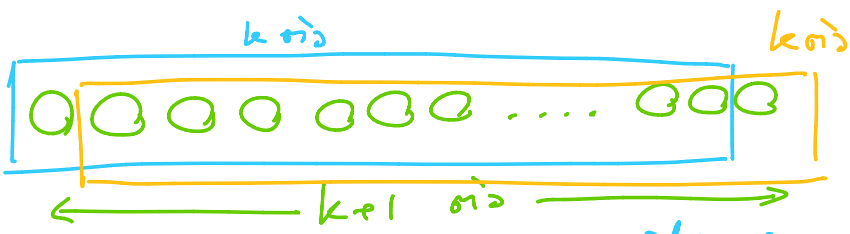
ม้าทุกตัวในโลกสีเดียวกัน

พิสูจน์ ให้ $P(n)$ แทน "ม้า n ตัวใดๆ มีสีเดียวกัน" —— (1)

เมื่อ $n=1$ เซตของ ม้า 1 ตัวย่อมมีสีเดียวกัน $\therefore P(1)$ จริง —— (2)

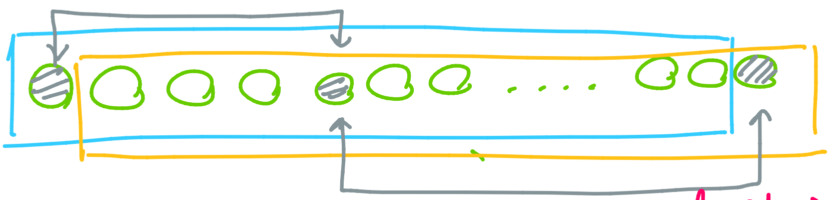
สมมติ ม้า k ตัวใดๆ มีสีเดียวกัน $\forall k \geq 1$ —— (3)

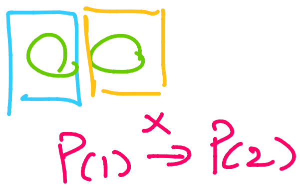
พิจารณาม้า $k+1$ ตัวใดๆ $a_1, a_2, \ldots, a_{k+1}$ —— (4)



$\therefore P(k)$ ได้ว่า $a_1, a_2, \ldots, a_k$ สีเดียวกัน —— (5)

$\therefore P(k)$ ได้ว่า $a_2, a_3, \ldots, a_k, a_{k+1}$ สีเดียวกัน —— (6)





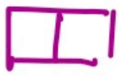
ไม่มี i กรณี $k=1$

$a_1 = a_i$ $a_i = a_k$ —— (7)

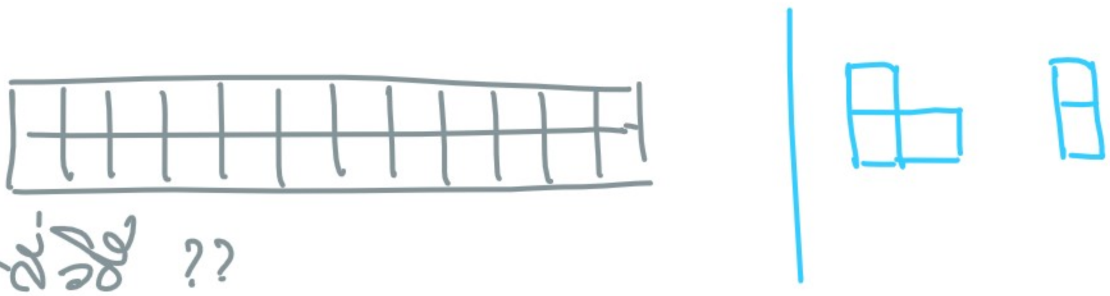
$\therefore a_1 = a_k$ ดัง $a_1 = a_2 = \ldots = a_{k-1} = a_k$ —— (8)

$\therefore$ ม้า $k+1$ ตัวจึงมีสีเดียวกัน —— (9)

$\therefore \forall n \geq 0$ ม้า n ตัวใดๆ สีเดียวกัน # ~~10~~

 โดมิโน ขนาด 2×1

ต้องการจับ โดมิโน n ตัว ลงกล่องขนาด 2×n



ทำได้กี่วิธี ??

ดูน

n=1

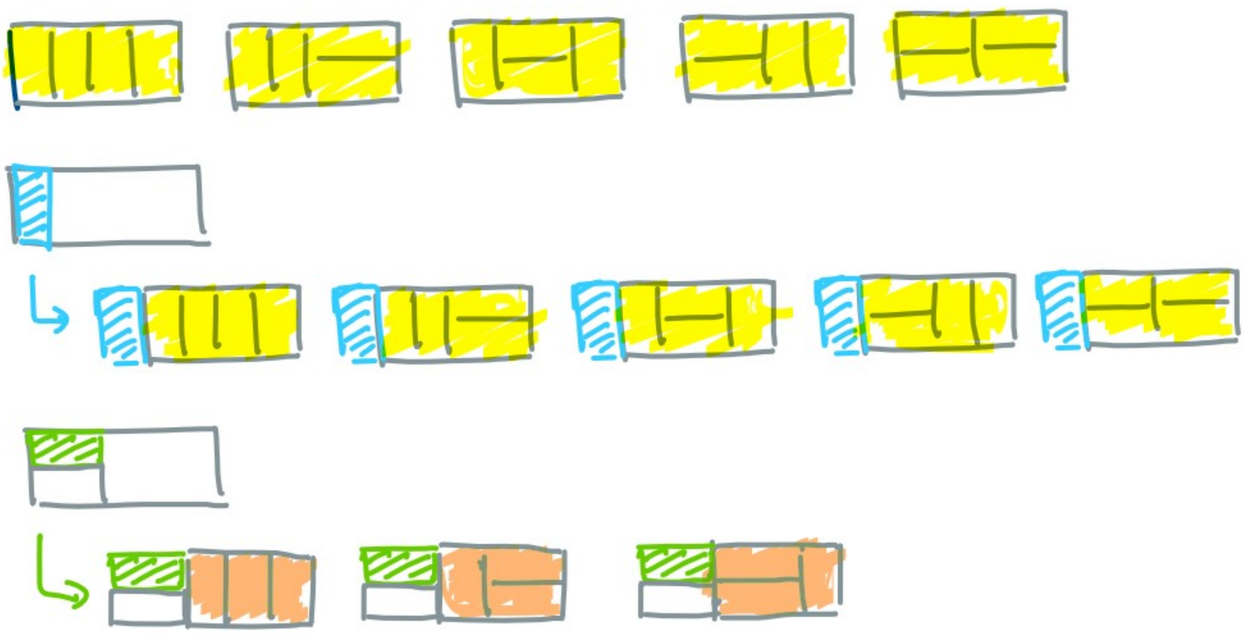
n=2

n=3

กล่องขนาด 2×n
ทำได้ F_n วิธี
โดย $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$
และ $F_1 = 1$, $F_2 = 2$

n=4

n=5



สำหรับ n=k ได้ $F_k = F_{k-1} + F_{k-2}$