Linear Algebra

element จะมาจาก

$\mathbb{R}$ จน.จ

$\mathbb{C}$ จน.—

GF(2) ← bit

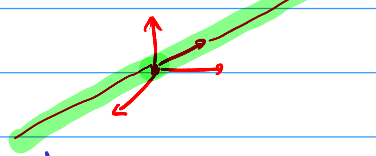
$\vec{x} = [1, 2, 0, 5]$

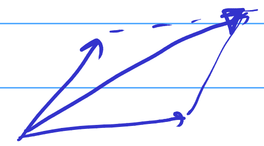
$$\underbrace{\vec{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 5 \end{bmatrix}}_{\text{ขนาด } 4} \qquad \vec{y} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \Big\} \text{ ขนาด } 3$$

Vector space

ทำอะไรกับ vector ได้บ้าง vector บน $\mathbb{R}$ $\vec{u} \in \mathbb{R}^3$, $[x_1, x_2, x_3]$, $\vec{u} = [1, 0, 2]$

- คูณด้วย scalar หรือ $\alpha \in \mathbb{R}$ $\alpha\vec{u} = [\alpha x_1, \alpha x_2, \alpha x_3]$





- $\vec{u}, \vec{v}$, $\vec{u} + \vec{v} = [u_1 + v_1, u_2 + v_2, u_3 + v_3]$

$\vec{u} = [u_1, u_2, u_3]$, $\vec{v} = [v_1, v_2, v_3]$

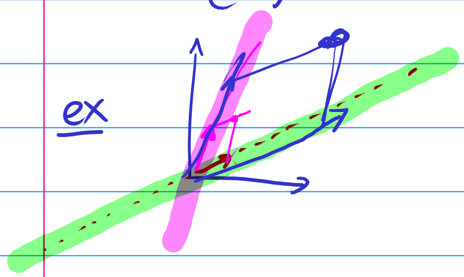
เซตของ vectors V เป็น vector space ถ้า

(V1) $0 \in V$

(V2) สำหรับ α ใดๆ ถ้า $\vec{u} \in V$, $\alpha\vec{u} \in V$

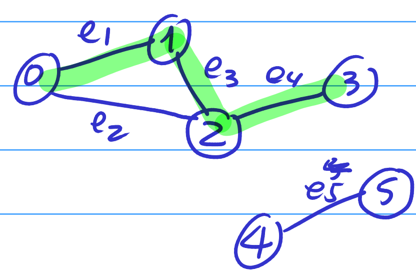
(V3) สำหรับ $\vec{u}, \vec{v} \in V$, $\vec{u} + \vec{v} \in V$.

ex



vector บน GF(2)

ex กราฟ G, n vertices, m edges

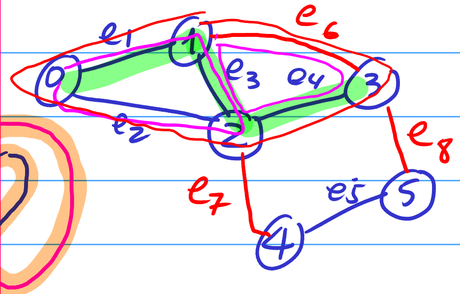


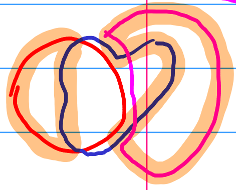
① vector บน GF(2) ขนาด n

แต่ละ edge e แทนเป็น vector ที่มี 1 บน co-ordinate แทนจุดปลาย

	0	1	2	3	4	5
e_1	[1	1	0	0	0	0]
e_2	[1	0	1	0	0	0]
e_3	[0	1	1			]
e_4	[		1	1		]
e_5	[				1	1]
$e_1+e_3+e_4$	1	0	0	1	0	0

SuperXOR





	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7	e_8
			1	1		1		
vC_1	1	1	1					
vC_2	1	1		1		1		
e_3			1	1		1		
C_4				1	1		1	1

Linear combination

. ให้ vector $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_\ell$ ให้ $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_\ell$.

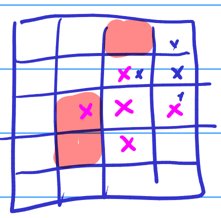
จะเรียก

$$\alpha_1\vec{u}_1 + \alpha_2\vec{u}_2 + \dots + \alpha_\ell\vec{u}_\ell$$

ว่าเป็น linear combination ของ $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_\ell$

$\vec{u}_1 = [10, 2, 0.1, 3, 0.1]$
$\vec{u}_2 = [0, 2, 1, 4, 0]$
$\vdots$
$\vec{u}_\ell = [\quad]$

Light Out



$\overbrace{[\quad 1 \quad 11\,1 \quad 1 \quad]}^{20}$

$[\; 1 \quad 1\; 1 \quad 1 \quad]$

Span

Span ของเซตของเวกเตอร์ $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_\ell$

ให้ $\boxed{\mathrm{Span}\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_\ell\}}$ แทนเซตของ linear comb ทั้งหมดของ $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_\ell$.

สำหรับเซต S ใดๆ $S = \{\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_\ell\}$

Lemma: Span S เป็น vector space.

Proof: (1) $0 \in \mathrm{Span}\, S$ เพราะ $0\cdot\vec{u}_1 + 0\cdot\vec{u}_2 + \dots + 0\vec{u}_\ell = 0 \in \mathrm{Span}$

(2) ถ้า $\vec{x} \in \mathrm{Span}\, S$, มีค่า $\vec{x} = \alpha_1\vec{u}_1 + \alpha_2\vec{u}_2 + \dots + \alpha_\ell\vec{u}_\ell$ สำหรับบาง $\alpha_1, \dots, \alpha_\ell$

จะได้ $\beta\vec{x} = \beta\alpha_1\vec{u}_1 + \beta\alpha_2\vec{u}_2 + \dots + \beta\alpha_\ell\vec{u}_\ell \in \mathrm{Span}\, S$.

(3) ✓

Definition เซตของเวกเตอร์ $\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_k$ linearly dependent ถ้า.

มีเวกเตอร์ $\vec{u}_i$ ที่เขียนให้อยู่ในรูปของ linear combi. ของเวกเตอร์อื่นได้.

Def: ถ้าเซตของเวกเตอร์ไม่ linearly dependent, จะเรียกว่าเป็น linearly independent

Lemma: พิจารณาเซต $\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_k$ ถ้า $\vec{u}_k \in \text{Span}\{\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_{k-1}\}$

$$\text{Span}\{\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_k\} = \text{Span}\{\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_{k-1}\}$$

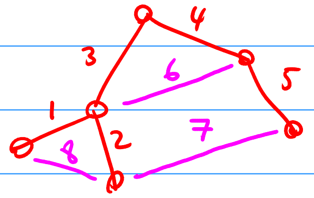
---

ex: พิจารณากราฟ $G=(V,E)$ ให้ $n=|V|$, $m=|E|$
สำหรับ cycle $C \in G$ ใดๆ จะมีเวกเตอร์ $\vec{v}_C \in GF(2)^m$

$$\vec{v}_C = [\overbrace{\quad 111 \quad\quad 111 \quad\quad}^{m}]$$

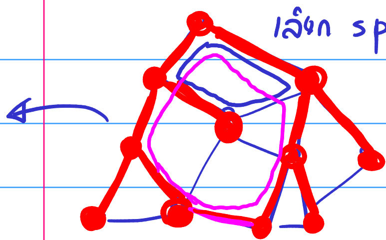
เป็น 1 ถ้า edge $\in C$

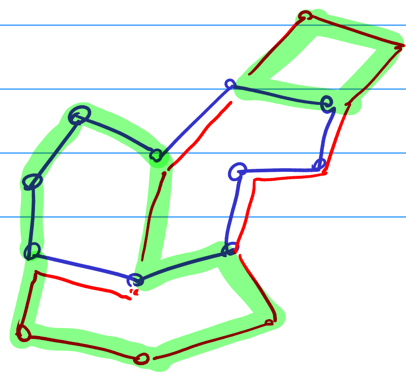
▶ Cycle space ของ G คือ vector space ที่ span โดย set ของ cycle ทั้งหมดในกราฟ.



	1	2	3	4	5	6	7	8
$C_1=($			1	1		1		)
$C_2=($		1			1	1	1	)
~~$C_1+C_2=C_3=($~~		~~1~~	~~1~~	~~1~~	~~1~~		~~1~~	~~)~~
$C_4=($	1	1						1)

เลือก spanning tree T

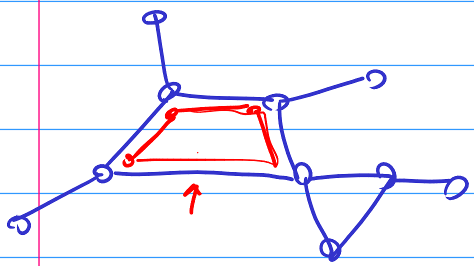




$\boxed{ex2}$ พิจารณากราฟ G, สร้าง vector space บน $GF(2)$ ขนาด n

edge $e=(u,v)$ $\quad \vec{v}_e = \begin{array}{c} \\ \end{array} \left[\; 0\,0\,0 \ldots \overset{u}{1}\, 0\,0\,0 \;\; \overset{v}{1} \ldots \ldots 0\,0\,0 \;\right]$

จะมี vector m vectors $\quad \vec{v}_{e_1}, \vec{v}_{e_2}, \ldots, \vec{v}_{e_m}$



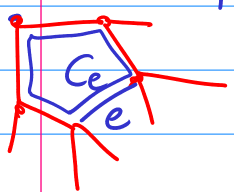
$$\vec{v}_{e_1} + \vec{v}_{e_2} + \cdots + \vec{v}_{e_m} = [\,0\,0\,0 \cdot \overset{s}{1} \cdots \overset{t}{1} \cdots\,]$$

$$\mathrm{Span}\{\vec{v}_{e_1}, \vec{v}_{e_2}, \ldots, \vec{v}_{e_m}\} = \mathrm{Span}\,\underbrace{\{\vec{v}_e : e \in \text{spanning tree } T\}}_{\text{ขนาด } n-1}$$

$G=(V,E)$
$n=|V|$
$m=|E|$

<u>Cycle spaces</u> vector ขนาด m
มี 1 ถ้ามี edge ใน coordinate นั้น

พิจารณา spanning tree $T \subseteq G$.
· สำหรับ non-tree edge $e \notin T$
จะมี cycle C_e ที่เป็น cycle เดียวใน
$T \cup \{e\}$, จะเรียก C_e เป็น
<u>fundamental cycle</u>.



→ จะมี $m-n+1$ fundamental cycle.

<u>Claim:</u> Set ของ fundamental cycle spans cycle space.

<u>ex 2</u> vector ขนาด n
สำหรับ edge $(u,v)=e$
มี vector $\vec{v}_e = [\,0 \cdots \overset{u}{1} \cdots \overset{v}{1} \cdots\,]$

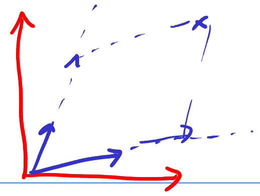
Vectorspace $V_G = \mathrm{Span}\overbrace{\{\vec{v}_{e_1}, \vec{v}_{e_2}, \ldots, \vec{v}_{e_m}\}}^{m}$

พิจารณา spanning tree $T \subseteq G$.

$$\mathrm{Span}\{\underbrace{\vec{v}_e \mid e \in T}_{n-1 \text{ vectors.}}\} = V_G$$

↘ cut space

พิจารณา vector space V



$\mathbb{R}^2$

$\text{Span}\left\{\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\right\}$

อยากจะหา เซตของ vector B ที่ $\text{Span}\, B = V$

<u>Observation:</u> ถ้า $B = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_k\}$ แต่ $\vec{u}_k \in \text{Span}\{\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_{k-1}\}$

$B - \{\vec{u}_k\}$ เป็นเซตที่เล็กกว่า

▷ $\boxed{\text{Shrink algorithm}}$

- หา B ที่ $\text{Span}\, B = V$
- ทิ้งไปเรื่อยๆ .

Claim: ถ้าพบเซต $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_k$ ถ้ามี $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ ที่ไม่เป็น 0 ทั้งหมด ที่ทำให้

$$\alpha_1 \vec{u}_1 + \alpha_2 \vec{u}_2 + \cdots + \alpha_k \vec{u}_k = 0.$$

จะได้ว่า $\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_k$ linearly dependent

<u>Grow algorithm</u>

- $B \leftarrow \emptyset$
- หา $\vec{u} \in V$ ที่ $\vec{u} \notin \text{Span}\, B$
  - เพิ่ม $\vec{u}$ ลงใน B

จน $\text{Span}\, B = V$ *

$B = \emptyset \xrightarrow{\text{Grow}}$ $\xleftarrow{\text{shrink}} B$, ที่ $\text{Span}\, B = V$

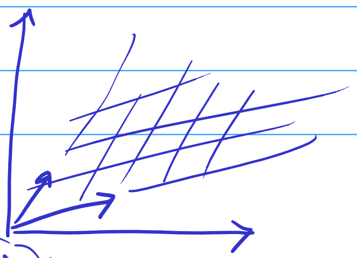
จนlinearly indep.

<u>Defn</u> จะเรียกเซต B ว่าเป็น <u>basis</u> ของ vector space V ถ้า

(1) $\text{Span}\, B = V$

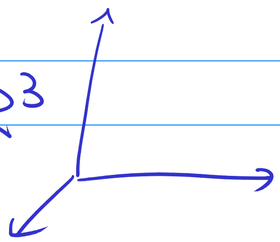
(2) B เป็น linearly independent.

<u>ex</u> $\mathbb{R}^2$



$\vec{u}_1, \vec{u}_2$ ที่ไม่ขนานกัน

<u>ex</u> $\mathbb{R}^3$



<u>Definition</u>: dimension ของ vector space V $(\dim V)$

= ขนาดของ basis ของ V

* <u>Thm</u>: ถ้า B_1 และ B_2 เป็น basis ของ vector space V

$|B_1| = |B_2|$.

ใช้เฉพาะ กรณี V มี dim จำกัด

<u>Lemma</u>: (exchange) พิจารณา set S ของ vector,

ถ้า $\vec{u} \in \operatorname{Span} S$, จะมี vector $\vec{w} \in S$ ที่

$$\operatorname{Span}\left(S \cup \{\vec{u}\} - \{\vec{w}\}\right) = \operatorname{Span} S.$$

<u>Lemma</u>: ให้ B เป็น set ของ linealy independant vector $\in V$

และ R เป็น set ของ vector ที่ $\operatorname{Span} R = V$

$$|B| \leq |R|$$