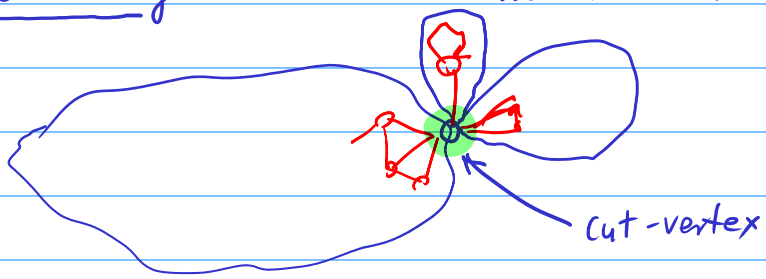
Graph Theory 2

- higher-order connectivity
- trees → separator / counting & bijection.
- graph coloring.

Vertex connecting

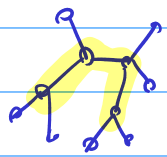
ลบ 1 vertex แล้วกราฟ แยกเป็นสองส่วน



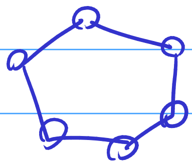
Definition A cut-vertex คือ vertex ที่เมื่อลบแล้ว กราฟ แตกเป็น สองส่วน

ถ้ากราฟไม่มี cut vertex จะเรียกว่า เป็นกราฟ ที่ 2-connected

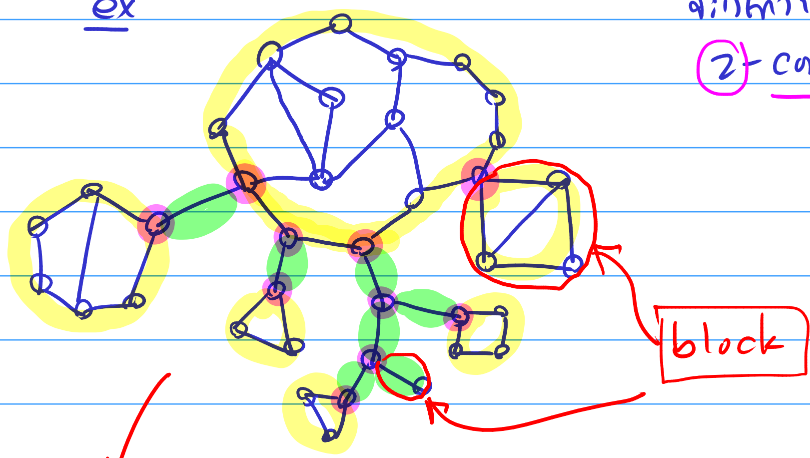
ex trees



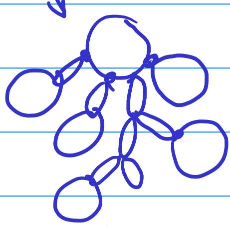
ex cycle ไม่มี cut vertex



ex



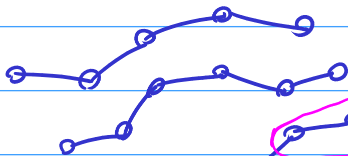
block-cut tree



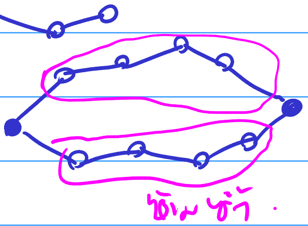
Lemma: ในกราฟ ใดๆ block สอง block จะมี จุดร่วมกัน ได้ไม่เกิน 1 จุดเท่านั้น

Def: Disjoint paths

paths ที่ไม่มีจุดร่วมกัน

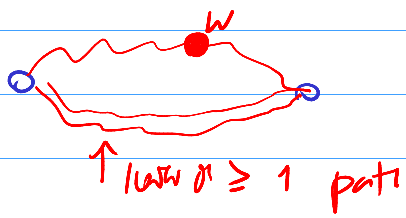


internally disjoint paths



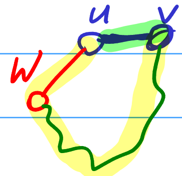
Thm: ถ้า G มี ≥ 3 vertices แล้ว: G เป็น 2-connected ⟺ ทุกคู่จุด u v ใดๆ จะมี internally disjoint path อย่างน้อย 2 paths

Proof: (⇐) พิจารณาลบ vertex w
พิจารณาคู่ vert u, v



(⇒) จะพิสูจน์ by induction บนความยาวของ path ที่สั้นที่สุด จาก u ไป v $(d(u,v))$

Base case: $d(u,v) = 1$

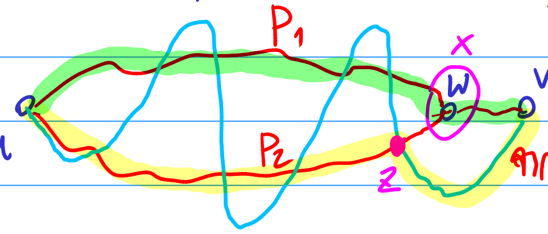


มี w เพราะ $\deg(u) > 1$

แต่จาก G เป็น 2-connected, ลบ u จะยังมี path P จาก v ไป w

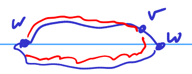
มี 2 paths ① (u,v) ② $P+(w,u)$

Inductive step: พิจารณา u,v ที่ $d(u,v) > 1$, ให้ w เป็น vertex ที่ $d(u,w) = d(u,v) - 1$



int. disj

จาก I.H. มี paths P_1, P_2 จาก $u \to w$

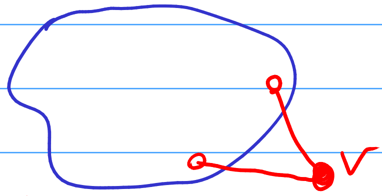
Case 1: ถ้า $v \in P_i$  ✓

Case 2: แต่จาก G 2-connected, จะมี path P' จาก u ไป v ที่ไม่ผ่าน w ให้ z เป็น จุดสุดท้ายที่ path P' ตัดกับ P_1 หรือ P_2

⇒ ต่อต่อไป ✓ ■

★ k-connected k edge.

Lemma: (expansion) ถ้า G เป็น 2-connected เพิ่ม vert v ที่ติดกับ vertex เก่าใน G 2 vertex กราฟที่ได้ จะยังเป็น 2-connected



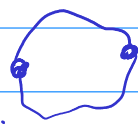
Proof: ลองลบ v, ไม่ก็ลบที่ไม่ใช่ v. ■

Thm: G ที่มี ≥ 3 vertices.

(A) G is connected และไม่มี cut vertex

(B) For any vertices x & y, จะมี internally disjoint paths จาก x ไป y ≥ 2 paths

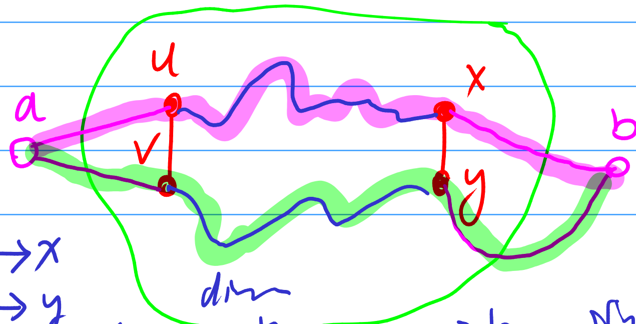
⇕

(C) For all x,y จะมี cycle ที่มีทั้ง x และ y 

(D) $\delta(G) \geq 1$, ทุกๆ คู่ของ edge จะมี cycle ที่ contain สอง edge นั้น

$\delta(G)$ minimum degree

(A∧C⇒D) พิจารณา edge $(u,v), (x,y)$



เพิ่ม a

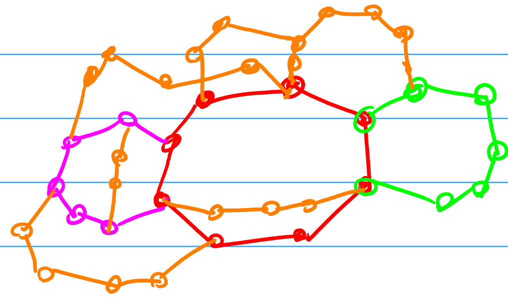
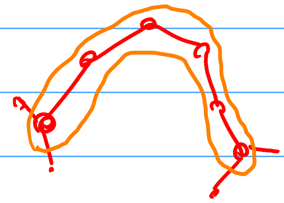
$a \leftrightarrow u$ $b \leftrightarrow x$

$a \leftrightarrow v$ $b \leftrightarrow y$

ใน paths $a \to b$, ได้ cycle ตามต้องการ

(D ⇒ B)... H.W.

subdivision : 

Ear decomposition  

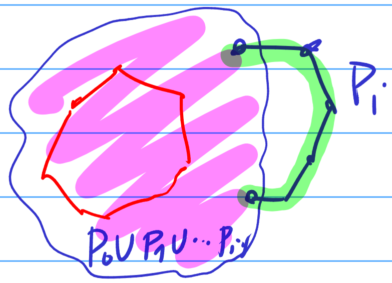
$P_0 \cup P_1 \cup \ldots = G$

Def: An ear of G

is a maximal path ที่ internal vertices มี degree 2

สำหรับกราฟ G , an ear decomposition คือการ decompose G ออกเป็น $P_0, P_1, P_2, \ldots, P_k$ โดยที่ • P_0 เป็น cycle

• และ P_i สำหรับ $i \geq 1$ เป็น ear ของ $P_0 \cup P_1 \cup \cdots \cup P_i$



Thm: G is 2-connected $\Longleftrightarrow$ G มี ear decomposition

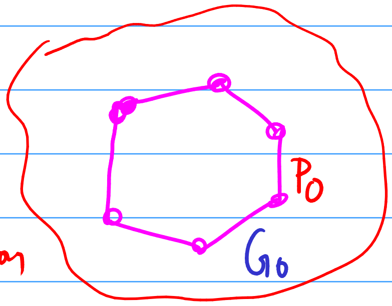
Proof: $(\Leftarrow)$ ✓

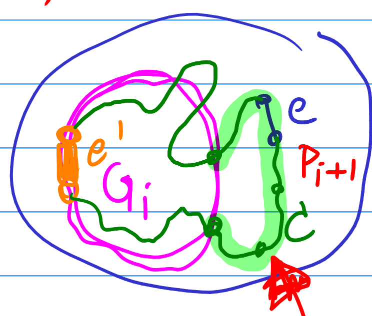
$(\Rightarrow)$

$P_0 \cup P_1 \cup \cdots \cup P_i$

ถ้า $G_i \neq G$ มี e ที่ $e \in G$ แต่ $e \notin G_i$

base case: เลือก P_0 ให้เป็น cycle ใดๆ ใน G





จะสร้าง G_{i+1} ที่ $G_{i+1} \supseteq G_i$ มา P_{i+1} ที่ $e \in P_{i+1}$

P_{i+1} เป็น ear ของ G_{i+1}

เลือก $e' \in G_i$

จาก Thm มี cycle $C \in G$ ที่ contain e' และ e

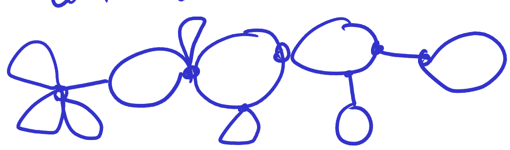
→ เลือก P_{i+1} จาก C

ดู vertex แรกที่ชนกับ G_i

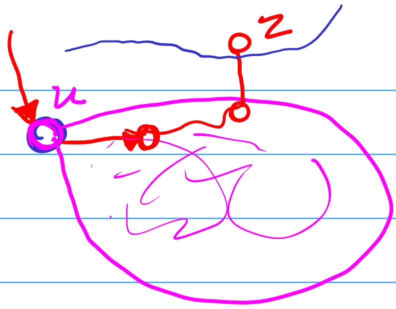
- ▶ $\boxed{\text{Blocks}}$ ให้ G เป็น set ของ blocks ใน G ×

DFS

- ▶ จำนวน internal disj paths ได้ไหม?

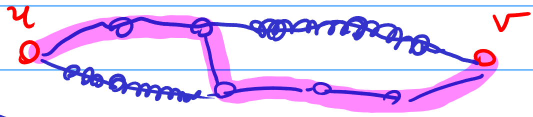


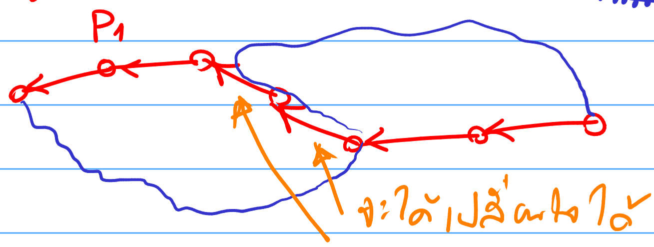
• ทำ Block-cut decomposition



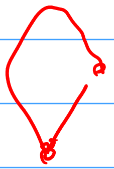
- ทุก vertex ก็เป็น หมายเลขของโหนดใหม่ แค่จุดที่เน้น

• หา 2 internally disjoint paths





จะได้เปลี่ยนต่อได้ augmenting path.



Trees (A) G is connected, ไม่มี cycle $\qquad G=(V,E)$

(B) G is connected, มี n-1 edge $\qquad n=|V|,\ m=|E|$

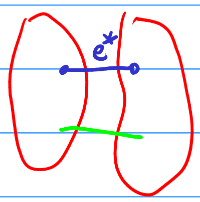
(C) G มี n-1 edge, ไม่มี cycle

(D) สำหรับ u,v ใดๆ จะมี path จาก u ไป v แค่ 1 path เท่านั้น. (exactly)

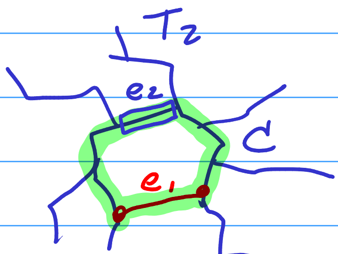
Def: พิจารณากราฟ G, T เป็น spanning tree ของ G ถ้า T เป็น subgraph ของ G และ T เป็น tree

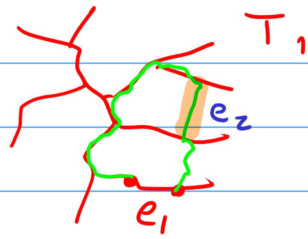
Lemma: ให้ T_1, T_2 เป็น spanning tree ของ G, จะมี edge $e_1 \in T_1$ แต่ $e_1 \notin T_2$ และ edge $e_2 \in T_2$, $e_2 \notin T_1$ ที่

$T_2 \cup \{e_1\} - \{e_2\}$ เป็น spanning tree ของ G

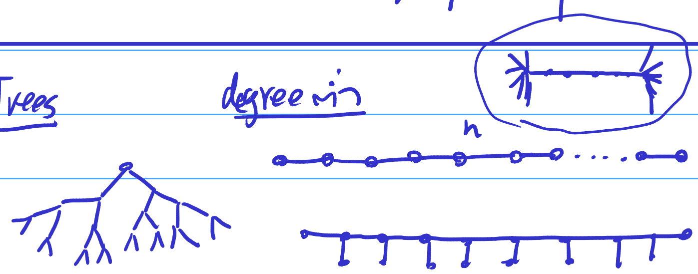


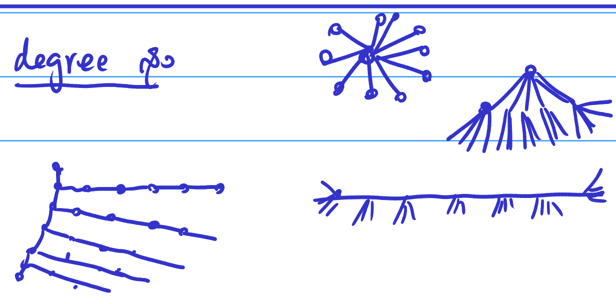
Proof:





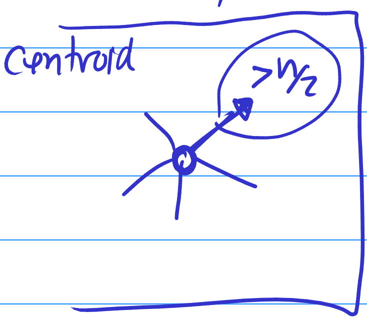
Trees $\qquad$ degree ต่ำ $\qquad$ degree สูง

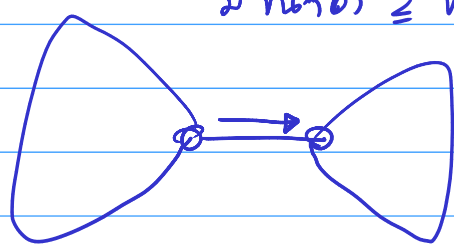


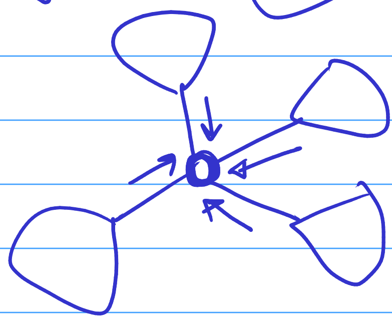


Thm สำหรับ tree ใดๆ $T = (V,E)$ ที่ $n = |V|$ ให้ $\Delta = \Delta(T)$ — degree มากสุด. จะมี edge e ที่ $T - \{e\}$ จะได้ forest ที่แต่ละ component มีขนาด $\le n/\Delta$

centroid

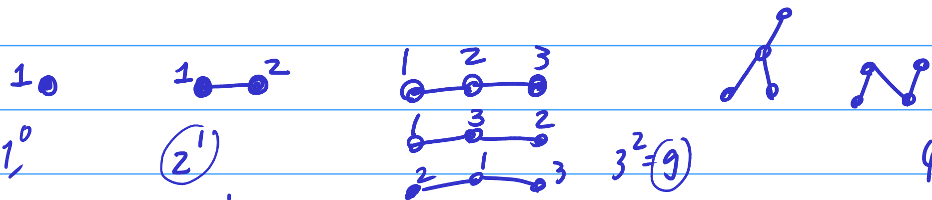






---

ex



1^0 2^1 $3^2 = 9$ $4^3 = \dots$

labeled trees tree ที่มีหมายเลขแปะจุดยอด

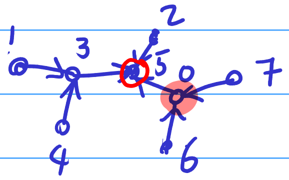
■ labeled trees ที่มี n vertices มีกี่ต้น?

input Line 1: n
Line ?: a_i b_i

จน. input $= \binom{\binom{n}{2}}{n-1}$ ×

$(n^2)^{n-1} = n^{2n-2}$

ส่ง parent



n

$p(0) = 5$
$p(1) = 3$
$\vdots$
$p(5) = 5$
$\vdots$

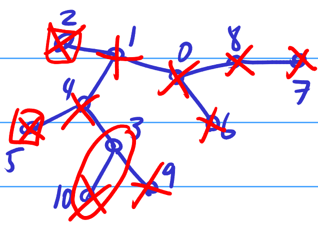
$\boxed{n^n}$

$n-1$ บรรทัด
input $= \boxed{n^{n-1}}$

ขาไป

Correct answer $\boxed{n^{n-2}}$

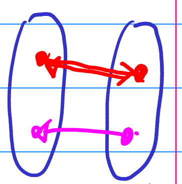
f **Prufer code:**



$n-2$ ตัว

1	4	0	8	0	1	4	3	3

~~3~~



• รับ tree T
output เลข 0–$(n-1)$ จน. $n-2$ ตัว $\Rightarrow$ # output n^{n-2}

Claim: ① รับ $f(T)$ สามารถหา T กลับมาได้ • # tree $\le n^{n-2}$

② สำหรับ input ใดๆ, จะมี T ที่ $f(T) =$ code นั้นๆ
(prufer code ใดๆ) $n^{n-2} \le$ # tree

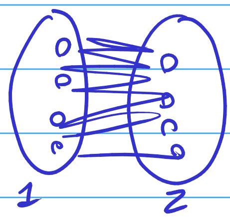
$c : V \to \mathbb{N}$

Graph Coloring

ให้ $G=(V,E)$, จะเรียก การกำหนดสี ให้กับ vertex ใน V ว่าเป็น การกำหนดสีที่ถูกต้อง ถ้า สำหรับ edge $(u,v)\in E$
$c(u) \neq c(v)$

→ $\chi(G)$ คือ จำนวนสีที่น้อยที่สุดที่ สามารถระบาย G ได้ (มีการกำหนดสีที่ถูกต้อง)

• กราฟใดที่ระบายได้ด้วย 2 สี



G เป็น bipartite $\Updownarrow$ $\chi(G)=2$ | BFS

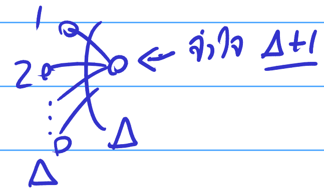
G ไม่มี directed cycle $\Leftrightarrow$ G เป็น DAG $\Leftrightarrow$ G มี topological ordering

G เป็น bipartite $\Leftrightarrow$ G ไม่มี odd cycle.

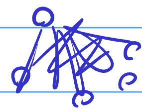
$\{1, 2, \ldots, n\}$

Greedy coloring: • เลือก vertex ในกราฟ ที่ยังไม่ถูกระบาย
• ระบาย u ด้วย สีหมายเลขน้อยสุด ที่ไม่ซ้ำกับ โหนดที่ติดกัน

Claim: Greedy coloring จะใช้สีไม่เกิน $\Delta+1$ สี

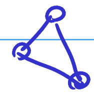


• Complete graph



n สี, $\Delta = n-1$

• Odd cycle

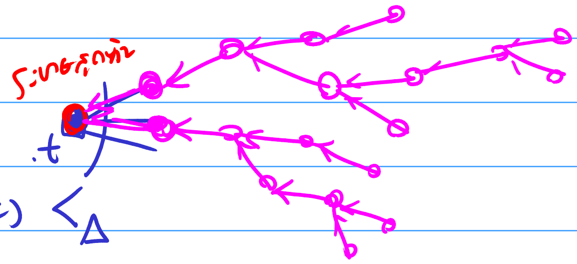


Ref: regular graph คือกราฟที่มี degree เท่ากันทุก vertex

Thm: (Brooks' theorem) ถ้า G เป็น complete graph หรือ odd cycle, $\chi(G) = \Delta+1$
ถ้า G เป็น graph อื่นๆ $\chi(G) \le \Delta$

Lemma: ถ้า G ไม่เป็น regular graph, $\chi(G) \le \Delta$

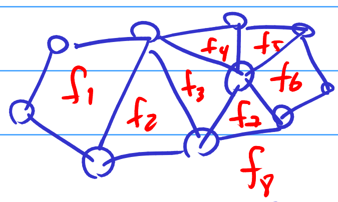
Proof:



หา spanning tree ของ G root ที่ t ที่ $\deg(t) < \Delta$
ระบาย leaf ก่อน ∎

Planar graphs

G $=(V,E)$ เป็น planar ถ้า สามารถวาด G ลงบน ระนาบโดยไม่มี เส้นตัดกัน



$n = |V|$
$m = |E|$

f = จำนวน face.

Thm: Planar graph ใดๆ ระบายสีได้ด้วยสีไม่เกิน 4 สี (4-color thm)

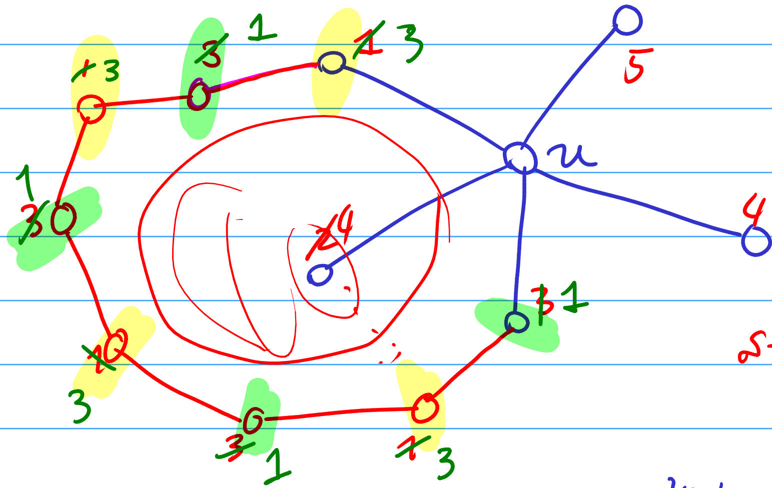
5-color thm

Assumptions G ไม่มี self loop, G เป็น simple

→ Lemma: ถ้า G เป็น simple planar graphs, G จะมี vertex ที่ degree ≤ 5.
⇒ ระบายได้ 6 สี.

Thm: ถ้า G เป็น simple planar graph, G จะระบายได้ด้วยสี ≤ 5 สี

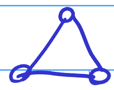
Prf: (sketch)



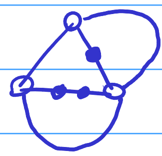
สลับกัน เป็น $2 \to 4$

$e^{ix} = \cos x + i \sin x$

Euler's formula



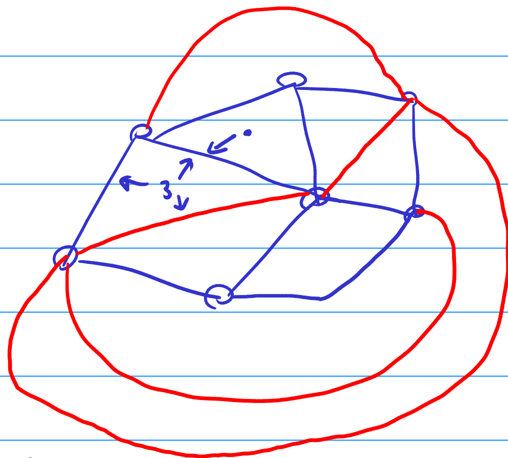
$n=3$ $f=2$
$m=3$



จน. vertex   จน edge

$$\boxed{n+f = m+2}$$

Edges in simple planar graphs



$2m \leq 3f$

- ให้แต่ face ละ 3 ขอบ
  ได้ $3f$
- แต่ละ face เกิดจาก edge edge ละ 2 ขอบ
  edge ทั้งหมด $2m$

$\therefore 3f \leq 2m \Rightarrow f \leq \frac{2m}{3}$ ใส่ใน Euler's f

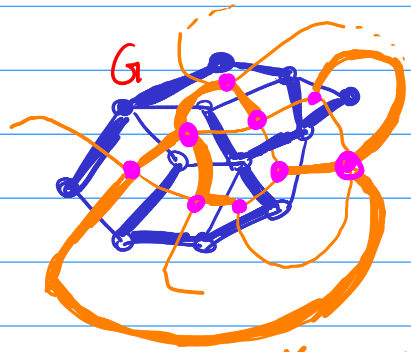
$\Rightarrow n + \frac{2m}{3} \leq m+2 \Rightarrow \boxed{m \leq 3n-6}$ .... degree?

$$\left[\sum_{u \in V} deg(u)\right] = 2m \leq \left[6n-12\right] \Rightarrow \text{degree เฉลี่ย} \leq \frac{6n-12}{n} < 6$$

primal = G

dual

<u>Euler's formula</u>



n vertices, m edges

f faces.

ให้ T เป็น spanning tree ของ G

T มี n vertices, $n-1$ edges

T^* จะเป็น spanning tree ของ G^*

มี f vertices, $f-1$ edges

เนื่องจากทุก edge ไม่ก็ $\in T$, หรือ dual อยู่ใน T^*

ดังนั้น $m = \underbrace{(n-1)}_{T} + \underbrace{(f-1)}_{T^*} \Rightarrow \boxed{m = n+f-2}$