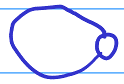
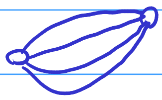


" self loop "



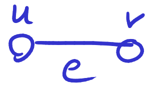
multiple edges

Graph theory 1

undirected / directed.

• กราฟ $G = (V, E)$ ← set ของ edges. ; set ของ vertices

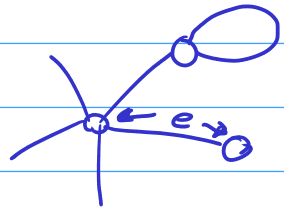
$E \subseteq V \times V$, $e \in E$, $e = (u,v)$ ← คู่ปลาย edge



$n = |V|$, $m = |E|$

definition สำหรับ จุดยอด $u \in V$, degree ของ u คือ จน. เส้นเชื่อมที่ adjacent กับ u

$\boxed{\deg(u)}$

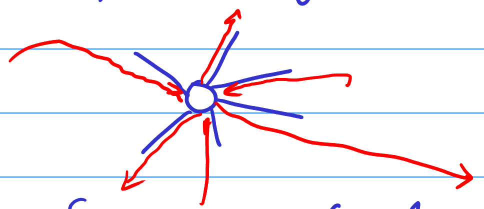


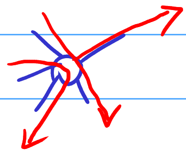
Lemma: (hand shaking lemma)

$$\sum_{u \in V} \deg(u) = 2m$$

Proof: แต่ละ edge มีส่วนใน ผลรวม ของ degree ของ จุดปลาย สองจุด พอดี ■

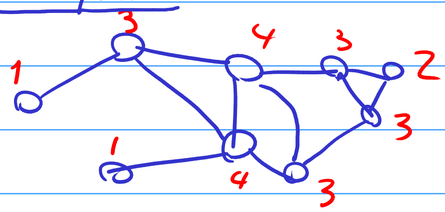
Cor: จน. จุดยอดที่มี degree เป็น คี่ จะเป็น จน.คู่ .



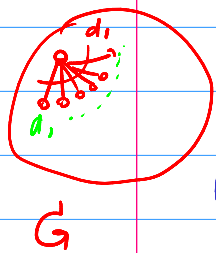


Graphic Sequence

G ต้องไม่มี self loop, ไม่มี multiple edge → simple graph



→ $\boxed{4, 4, 3, 3, 3, 3, 2, 1, 1}$



ถ้ามี self loop ได้ — easy.

ให้ degree sequence $d = d_1 \geq d_2 \geq d_3 \geq \cdots \geq d_n$ ให้ $\Delta = d_1$

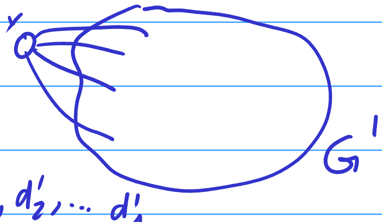
สร้าง degree sequence d' โดย ลบ d_1, ให้ $d'_1 = d_2 - 1$, $d'_2 = d_3 - 1, \ldots$

$d'_\Delta = d_{\Delta+1} - 1$, $d'_i = d_{i+1}$ for $i > \Delta$.

Thm: d เป็น graphic sequence iff d' เป็น graphic sequence, ถ้า $n \geq 1$. ถ้า $n = 1$, $d = 0$

Proof: $(\Leftarrow)$ ถ้า d' เป็น graphic sequence จะมีกราฟ graph G' ที่มี degree d'

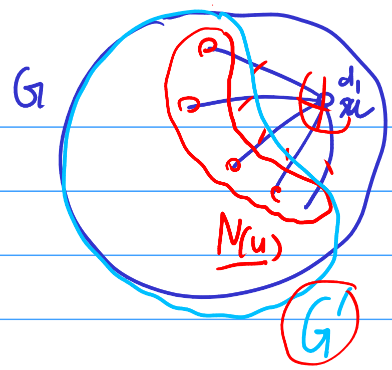
สร้าง G โดยเพิ่ม x
เชื่อม x กับ โหนด
ที่มี degree $d'_1, d'_2, \ldots d'_\Delta$



$(\Rightarrow)$ Assume ว่า d เป็น graphic sequence จะต้องมีกราฟ G ที่มี degree sequence ตรงกับ d. , จะแสดงว่า d' เป็น graphic sequence ด้วย

$d_1, d_2, d_3, \dots \Delta \quad d_n$

$d_2-1, d_3-1, \dots$



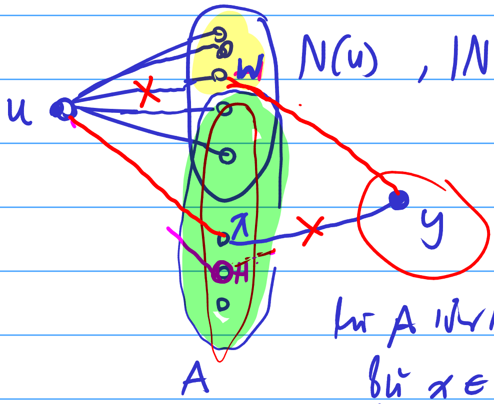
ให้ u เป็น vertex ที่มี degree $d_1 = \Delta$

ให้ N(u) แทนเซตของ vertex ที่ติดกับ u

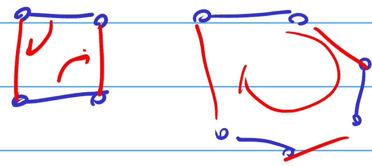
✓. ถ้า degree ของ vertices ใน N(u) ตรงกับ $\boxed{d_2, d_3, \dots, d_{\Delta+1}}$ ✓

แล้วลบ u ⟶ G' จะมี degree seq ตรงกับ d'

ติดกัน
$u \leftrightarrow v$
$u \not\leftrightarrow v$
ไม่ติดกัน



N(u) , $|N(u)| = \Delta$



ให้ A เป็นเซต Δ vertices ที่มี degree $d_2, d_3, \dots, d_{\Delta+1}$

ให้ $x \in A - N(u)$ ที่ degree สูงสุด

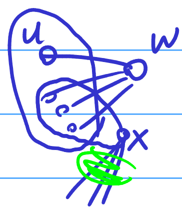
ให้ $w \in N(u) - A$

Claim มี y ที่ $x \leftrightarrow y$ และ $w \not\leftrightarrow y$

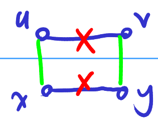
→ ลบ (u,w), (x,y) เพิ่ม (w,y), (u,x), ได้ G'' ที่ $|N(u) \cap A|$ มีขนาดมากขึ้น

Prf: สังเกตว่า degree ของ x ≥ degree ของ w ใน G
และ w ติดกับ u แต่ x ไม่ติดกับ u

จะต้องมี y ตามต้องการ ∎



2-switch เป็น operation ที่เปลี่ยนกราฟ G → G' โดยเลือก 4 vertices

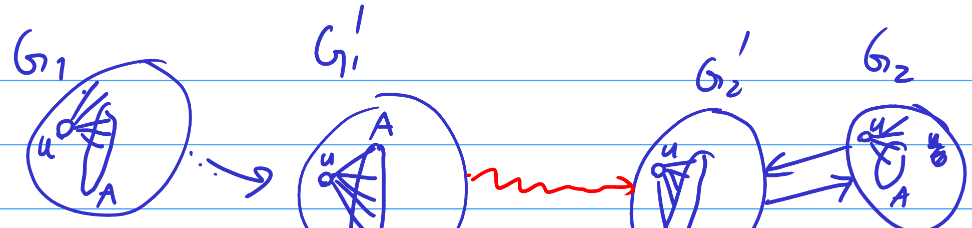


ลบ edge (u,v), (x,y)
เพิ่ม edge (u,x) (v,y)

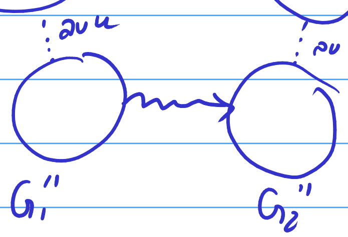
Thm: มี sequence ของ 2-switch operation ที่แปลง G_1 ไป G_2 iff ⟺ degree sequence ของ G_1 และ G_2 เหมือนกัน

Prf: (⇒) ✓ เพราะว่า 2-switch preserve degree seq.

(⇐)

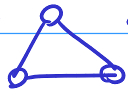


ให้ u เป็นโหนดที่ degree สูงสุดใน G_1, G_2

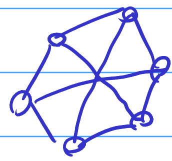


Extremal problems

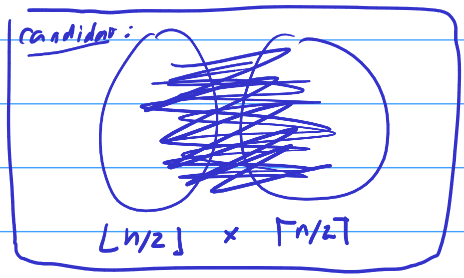
เรื่อง กราฟ



สามเหลี่ยม.

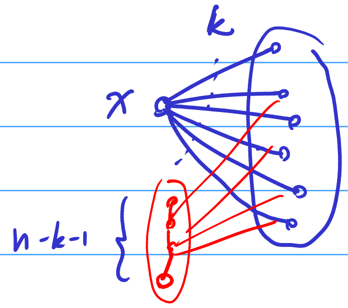


กราฟที่มี n vertices ที่ไม่มีสามเหลี่ยม มี edge ได้มากที่สุดกี่เส้น ?



$K_{\lfloor n/2 \rfloor, \lceil n/2 \rceil}$

พิจารณา G ที่ไม่มี triangle



พิจารณา x ที่ degree สูงสุด

จะไม่มี edge ระหว่างโหนดใน N(x)

ให้ $k = \deg(x)$

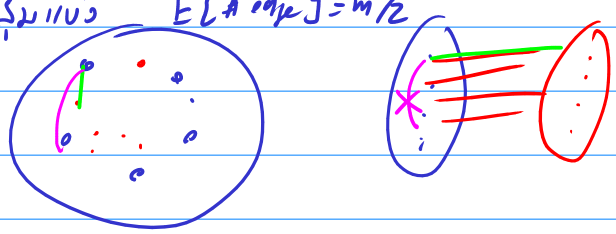
G จะมี edge ไม่เกิน $k + (n-k-1)\cdot k = (n-k)k$

ค่านี้เยอะสุดที่ $k = \lfloor n/2 \rfloor$

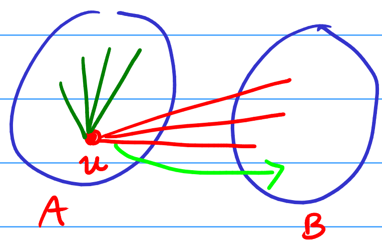
Thm: พิจารณา กราฟ G ใดๆ

จะมี subgraph ของ G ที่เป็น bipartite ที่มีอย่างน้อย $m/2$ edge

Proof 1 สุ่มแบ่ง $E[\#\text{ edge}] = m/2$

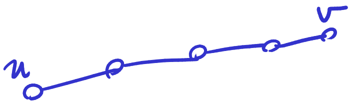


Proof 2:



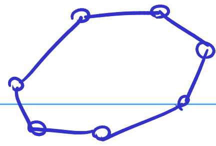
ย้าย $u^{\in A}$ ถ้า N(u) อยู่ใน A มากกว่า B

Definition: $\boxed{\text{simple}}$ path



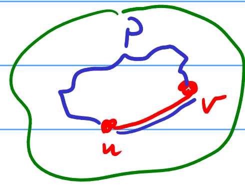
uv-path

cycle



Connectivity กราฟ $G=(V,E)$ is connected ถ้า ทุกๆ คู่ $u,v \in V$, มี uv-path ใน G

Connected component $C \subseteq V$ เป็น connected component ถ้า C เป็น maximal set ที่ ทุกๆ vertices $u,v \in C$ มี path จาก u ไป v.



- กราฟที่มี n vertices ที่ connected มี edge น้อยสุดได้กี่ edge? $n-1$
- กราฟที่มี n vertices ที่ไม่มี cycle มี edge มากที่สุดได้กี่ edge? $n-1$

tree: ถ้า G เป็น tree (กราฟที่มี n vertices)
(a) G มี $n-1$ edge
(b) G is connected
(c) G ไม่มี cycle.

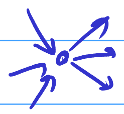
Directed graphs edge มีทิศทาง มี $(u,v) \in E$ ไม่จำเป็นต้องมี $(v,u) \in E$

① **Directed acyclic graph** (DAG)

- มี n vertices, DAG มี edge มากที่สุดได้กี่ edge? $(n-1)+(n-2)+\cdots$

- ให้ directed graph G, G มี cycle?
  - yes: certificate: cycle $C \subseteq G$. ตรวจ $O(n)$
  - no: certificate: topological ordering $\boxed{v_1, v_2, \ldots, v_n}$ ที่ ทุกๆ edge $(v_i, v_j) \in E$ $i<j$.

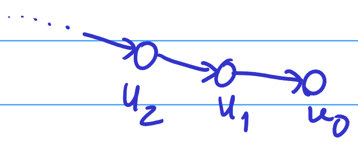
indegree
out degree

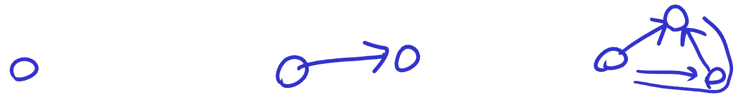


▸ หา topological ordering
- หา vertex ที่ indegree $= 0$, ลบ. (book keeping) $O(m+n)$

Thm: ถ้า G เป็น DAG, จะมี vertex ที่ indegree $= 0$.

Proof:





Tournament $G=(V,E)$ จะเป็น tournament ถ้า สำหรับ $u,v \in V$ $u \neq v$
จะมี $(u,v) \in E$ หรือ $(v,u) \in E$
เพียง 1 edge พอดี

Def: path P จะเป็น Hamiltonian path ถ้า P ผ่านทุกๆ vertex
vertex ละ 1 ครั้ง

Thm: สำหรับ tournament ใดๆ จะมี Hamiltonian path เสมอ.

Proof: จะพิสูจน์ by induction บน n

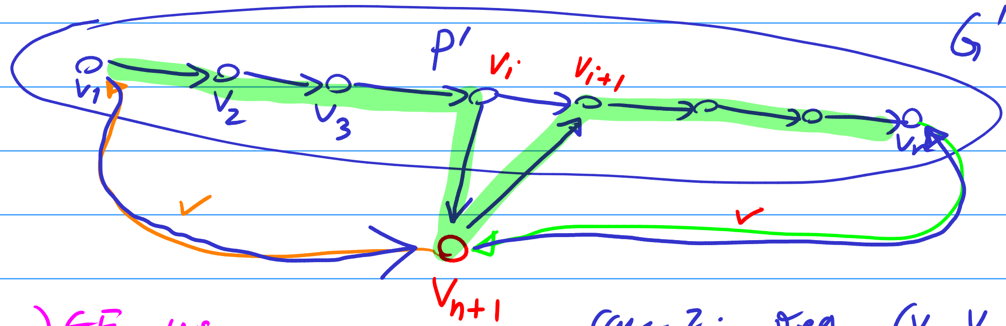
Base case: easy. $\circ$ ✓ $n=1$ $\circ \to \circ$ ✓ $n=2$

Induction step: พิจารณา กราฟ G ที่มี $n+1$ node พิจารณา v_{n+1}
พิจารณา G' ที่มี n node ที่ได้จากการลบ v_{n+1} จาก G

จาก Induction hypothesis จะได้ว่า
G' มี Hamiltonian path P' เพราะ G' เป็น tournament
ที่มี n vertices

Goal: G มี Hamiltonian path.

ให้ P' เป็น Ham path ใน G'



case 1 ถ้า $(v_n, v_{n+1}) \in E$ หรือ $(v_{n+1}, v_1) \in E$ ✓

Case 2: ดังนั้น $(v_1, v_{n+1}) \in E$
$(v_{n+1}, v_n) \in E$

Claim: มี v_i, v_{i+1}
ที่มี edge (v_i, v_{n+1}) และ (v_{n+1}, v_{i+1})

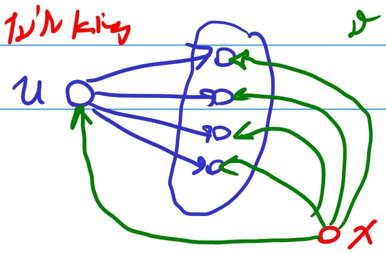
Proof: (H.W.)

Definition: จะเรียก vertex v ว่า king ถ้า $\forall u \neq v$, มี path ความยาว ไม่เกิน 2
จาก v ไป u

Thm: ใน tournament ใดๆ จะมี king เสมอ.

Proof: สมมติ u ที่ไม่ใช่ king

มี x ที่ $u \not\to x$, ทุก $v \in N(u)$
$v \not\to x$



Genome:

undirected **Euler tour** ในกราฟ G tour คือ ________

Euler tour คือ tour ที่ผ่านทุก edge edge ละ 1 ครั้ง

Def: G เป็น Eulerian ถ้า ทุกโหนด G มี degree คู่

Thm: G จะมี Euler tour $\Leftrightarrow$ G เป็น Eulerian graph. แต่: G is connected

Proof: $(\Rightarrow)$

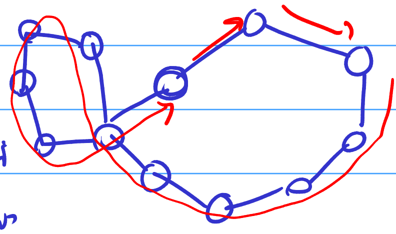
$(\Leftarrow)$ พิสูจน์ตามขั้นตอนต่อไปนี้

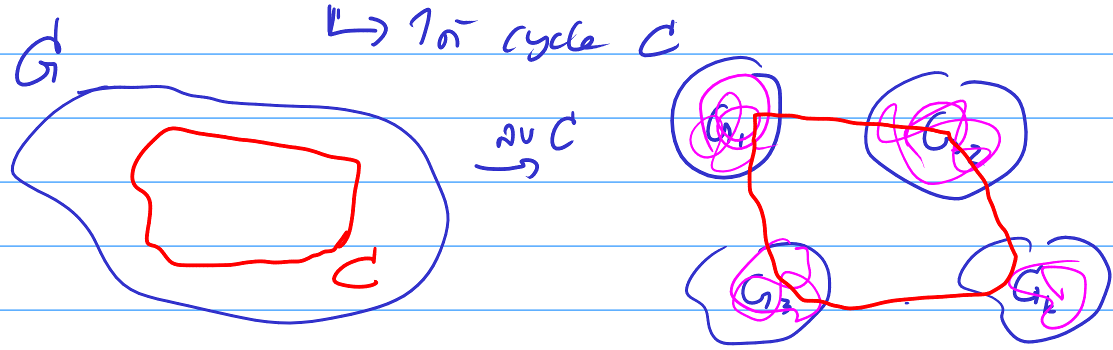
(1) เริ่มที่ vertex ใดๆ u

(2) เดินไปเรื่อยๆ อย่าใช้ edge ซ้ำ

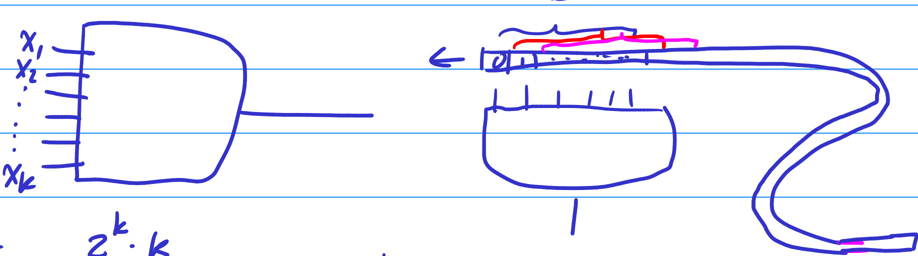
(3) กลับมาที่ ~~u~~ โหนดเกิดปัญหา

↳ ได้ cycle C





Application



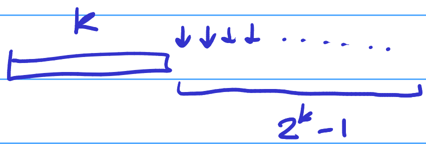
$k = 1$ 01

$k = 2$ 00011011 ← $2^k \cdot k$

00110 ←

De Bruijn

$k = 3$ 0001101 . . . .

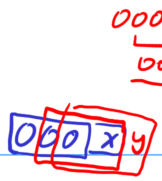


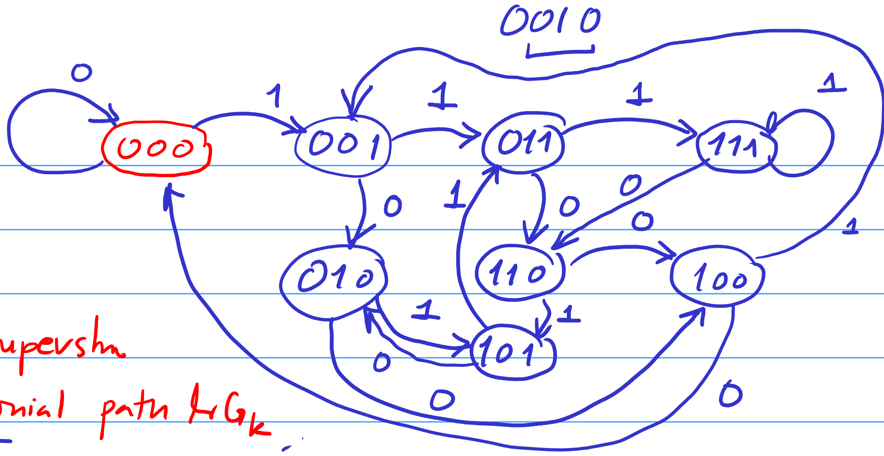
$2^k - 1 + k$

Question: ให้ k หา string ที่สั้นที่สุด ที่มีทุกๆ bit string ความยาว k เป็น substring. (contiguous) ...

$k=3$

2^k



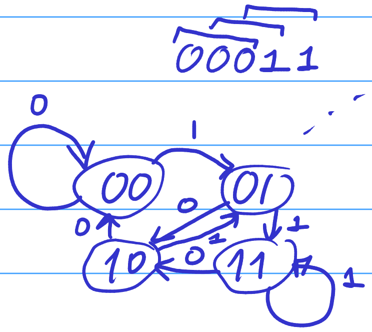


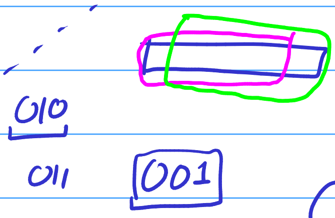
G_k string ที่เป็น supersh..

เป็น Hamiltonian path ใน G_k

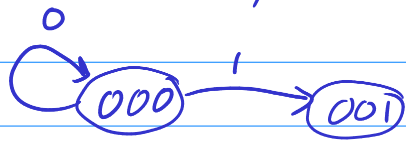
Euler Path

2^{k-1}





$k=4$, $2^{k-1}=8$

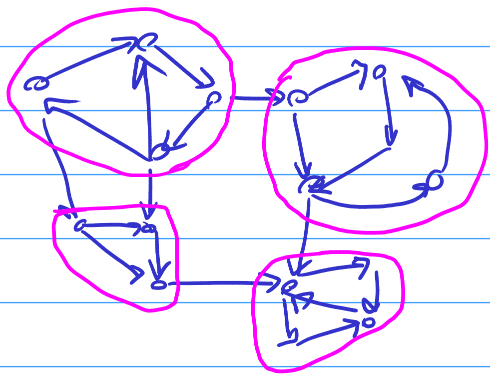


Strong connectivity

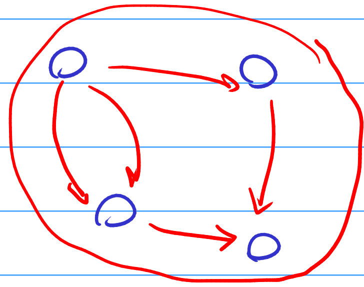
directed graph $G=(V,E)$ is strongly connected

ถ้า $\forall u,v \in V$ มี path จาก u ไป v

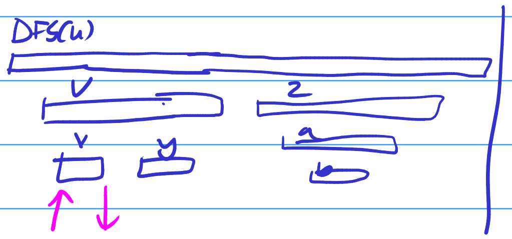
SCC

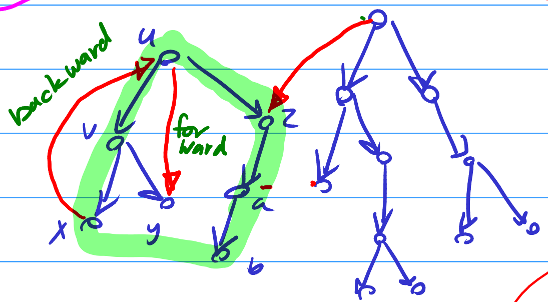


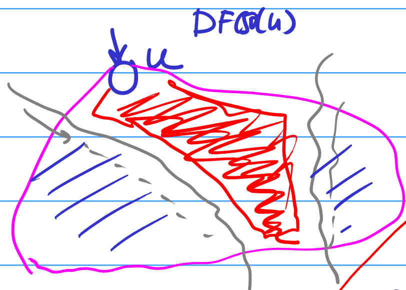
collapse $\rightarrow$

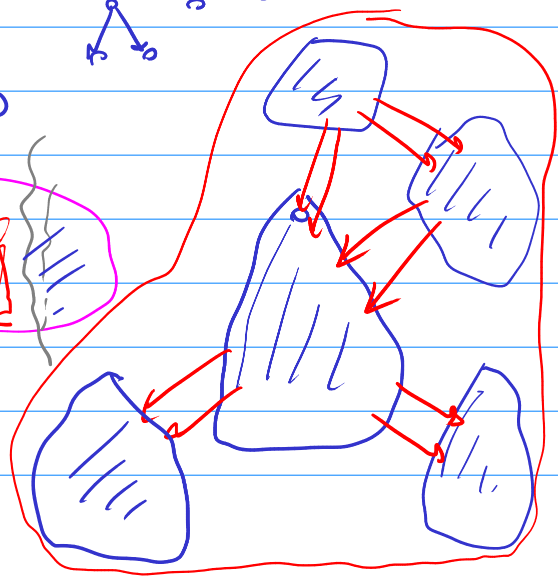


Depth-First Search





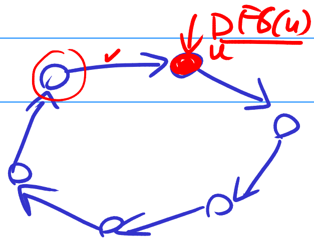




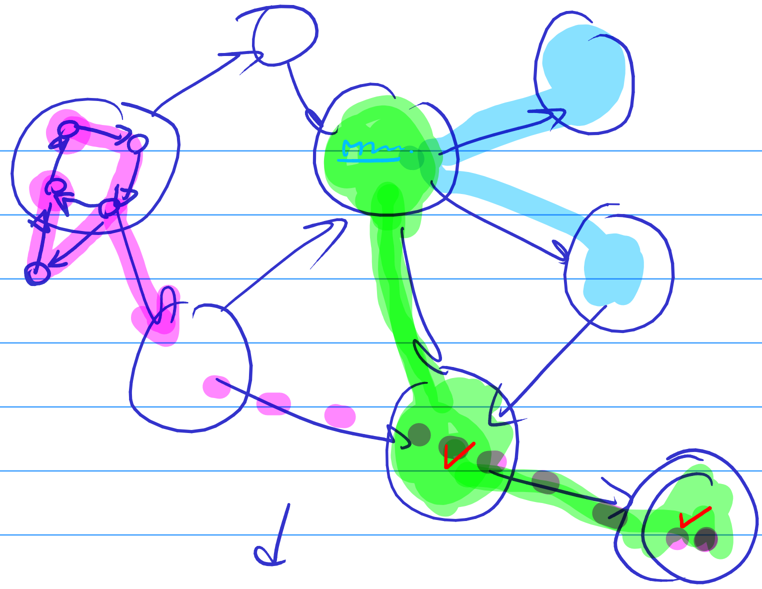
Claim: ถ้ากราฟมี cycle

จะมี backward edge.

Proof:



G



G^R