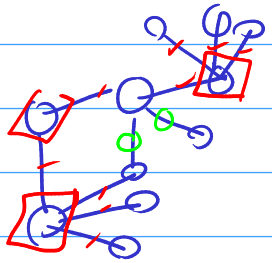
Fixed-parameter algorithms

Vertex Cover

n^k

ในกราฟ $G=(V,E)$ หา set ของ $C \subseteq V$ ที่

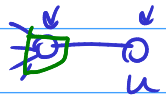


ทุก edge (u,v), $u \in C$ หรือ $v \in C$

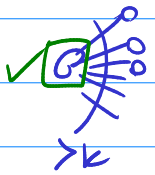
หา C, ที่ทำให้ $|C| \leq k$

Rule 0: ถ้ามี isolated vertices, ลบทิ้ง

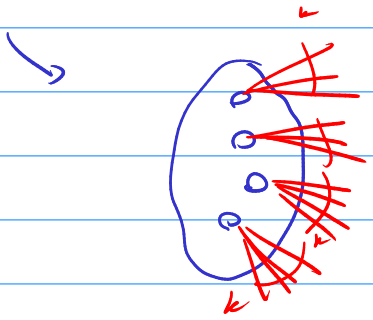
Rule 1: ถ้ามี vertex degree 1, เลือก vertex ที่เกาะกับมัน



Rule 2: ถ้ามี vertex ที่ degree $> k$, เลือก vertex นั้น



หลังจาก apply Rule 0-2 กราฟเหลือ vertex degree $\leq k$

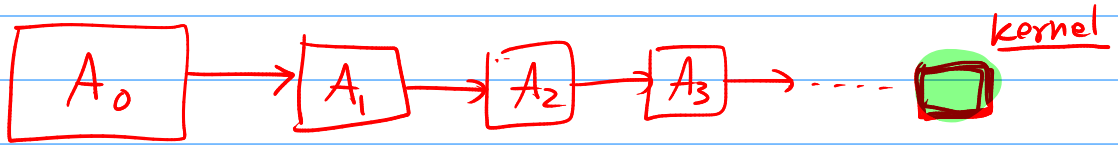


กราฟจะมีไม่เกิน k^2 edges

k^2+k vertices

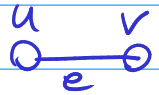
$(k^2)^k$

Data reduction rule



Depth-bounded search trees

Brute-force ①: $\binom{n}{k} = O(n^k)$

Brute force ②: 

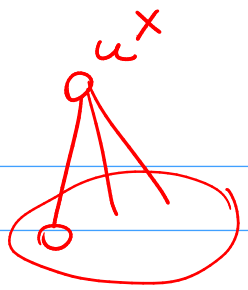
เลือก edge (u,v)

เลือก u ไม่เลือก u แต่เลือก v

$$T(k) = \underbrace{T(k-1)}_{\text{เลือก } u} + \underbrace{T(k-1)}_{\text{ไม่เลือก } u \text{, แต่เลือก } v}$$

n^k

$T(k) = 2^k \cdot \text{poly}(n)$

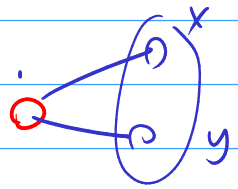


$T(k) = T(k-1)$

Brute force(2):

Rule: ถ้ามี vertex degree 1: เลือกเส้นที่ตกกระทบมัน

→ ถ้าทำไม่ได้ min degree ≥ 2



1,1 $2^k \rightarrow T(k) = T(k-1) + T(k-2)$

1,2 1.618^k $= (1.618)^k \cdot \text{poly}(n)$

1,3 1.4656^k

Detour

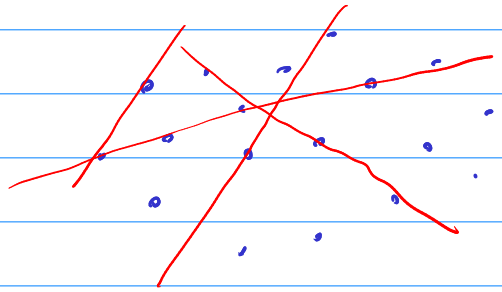
$\alpha^k = \alpha^{k-1} + \alpha^{k-2}$

$\alpha^2 = \alpha + 1$

$\alpha^2 - \alpha - 1 = 0$

$\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$

Cover จุดบนระนาบด้วยเส้นตรง



ให้จุด n จุด

บางเส้นตรง ที่ผ่านจุดทุกจุด

สามารถทำได้ด้วย เส้นตรง k เส้น

Rule 1: ถ้ามีเส้นที่ผ่าน

$k+1$ จุด

เลือกเส้นนั้นแน่นอน

Maximum Satisfiability

ตัวแปร $x_1, x_2, \ldots, x_n$ เป็น Boolean

นิพจน์ ϕ เป็นนิพจน์ CNF (conjuctive normal form)

คือ ϕ เป็นนิพจน์ที่เป็นการ AND ($\wedge$) กันของ clauses ที่เป็นการ OR($\vee$)

กันของตัวแปรหรือนิเสธของตัวแปร

BF: 2^n

ให้ m แทนจำนวน clause ของ ϕ

ex $(x_1 \vee x_2 \vee \neg x_3) \wedge (x_4 \vee \neg x_5) \wedge (\neg x_1 \vee x_3 \vee \neg x_4 \vee x_2) \wedge (x_3 \vee x_6 \vee x_2) \wedge (\neg x_1 \vee \neg x_2 \vee x_4)$

1 2 3 4 5 clauses

Input CNF ϕ, integer k หา assignment ของตัวแปร $x_1, x_2, \ldots, x_n$

ที่ทำให้ clause เป็นจริง $\geq k$ clauses.

Case 1: ถ้า $k \leq m/2$ ทำได้เลย!

ทำไงล่ะ???

① เลือก

② สุ่ม

③ ลอง TTTTTT…T

กับ FFFFF….F

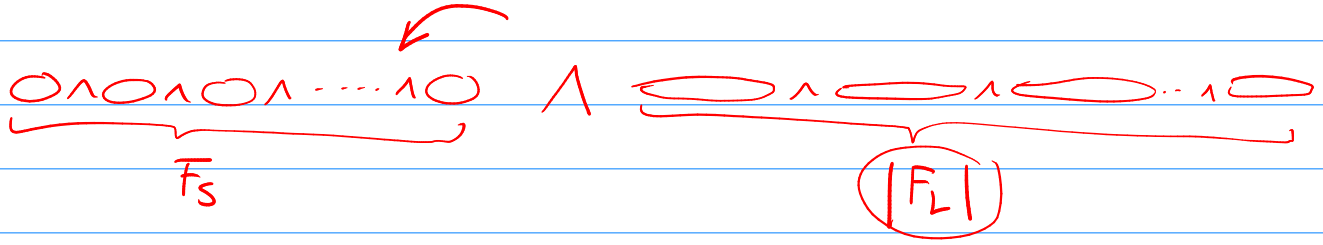
Observation: ฟังก์ชัน clause ที่ $\geq k$ ตัวแปร $\geq k$ ตัวแปร

ถ้า $|F_L| \geq k$ ถ้าจะ sat $\geq k$ clauses → ทำได้เลย.

C_1 (V V V ---- V)
C_2 (V V V ---- V)
⋮
C_k (V V V ---- V)

$\emptyset$ → แบ่ง clause ออกเป็นสองกลุ่ม F_S clause small มีตัวแปร $< k$ ตัว
F_L large มีตัวแปร $\geq k$ ตัว.

Claim: ถ้า สามารถทำให้ $\emptyset$ เป็นจริงได้ k clause
แสดง: ต้องทำให้ clauses ใน F_S เป็นจริงได้ $\geq k - |F_L|$ clauses



Data reduction rule
แสดง $\emptyset$ เป็น F_S, F_L

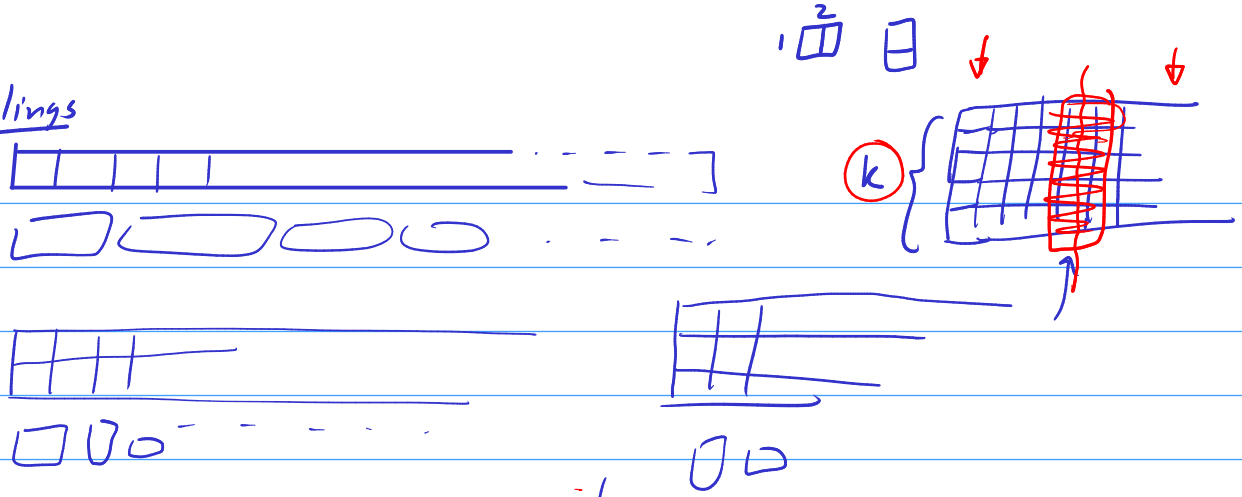
$(\emptyset, k) \longrightarrow (F_S, k - |F_L|)$

Case 1: ถ้า $|F_S| \geq 2(k - |F_L|)$ ✓
ทำได้แน่ ๆ

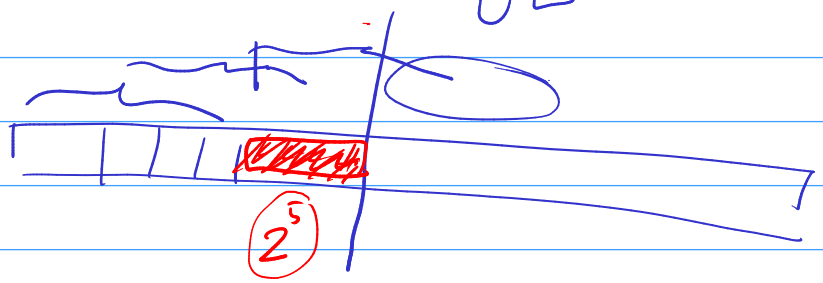
Case 2: $|F_S| \leq 2(k - |F_L|) \leq 2k$

$2k$ clause, แต่ละ clause มี k ตัวแปร
→ ขนาดของอินพุตไม่เกิน n ตัว

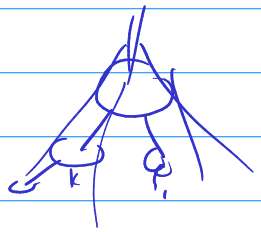
Tilings

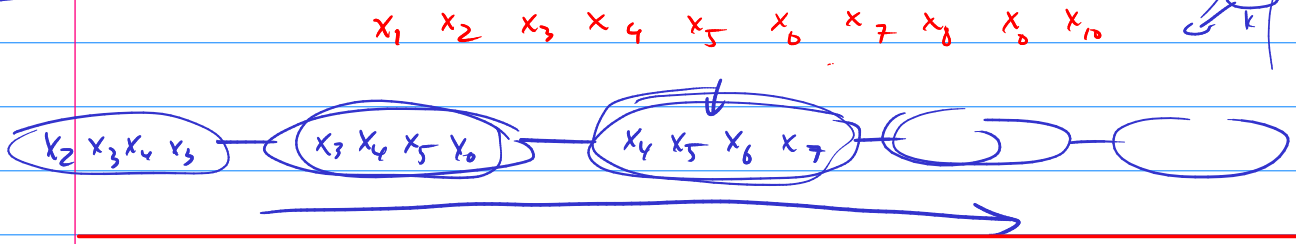


Zoo



free width





Vertex Cover for $G=(V,E)$, a vertex cover, of $\leq k$ vertices

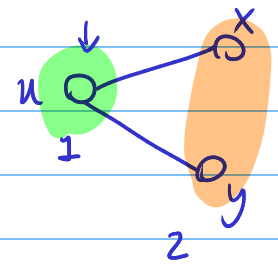
1.618^k

1.465^k

$$T(k) = T(k-1) + \cancel{T(k-2)}^{k-3}$$

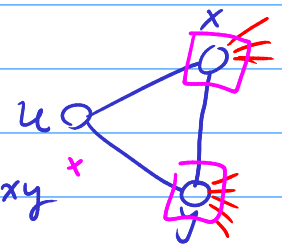
Apply: Rule 0 – isolated vertices

Rule 1 – deg 1 vertex



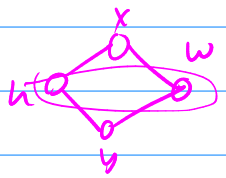
$T(k) = T(k-2)$

Case 1 u & edge xy

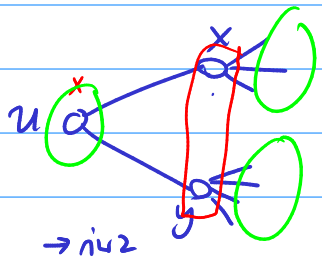


✓

1,1	2
1,2	1.68
1,3	1.465
1,4	1.3803
2,1	1.618
2,2	1.4142



Case 2



$T(k) = T(k-2) + T(k-2)$

2 choices

① เลือก x, y → เหลือ 2

② เลือก u แทน: $N(x)$ & $N(y)$ → เหลือ 2

u มี degree ≥ 3, $T(k) = T(k-1) + T(k-3)$

Recurrence

$T(k) = T(k-2)$

$T(k) = T(k-2) + T(k-2)$ ← 1.4142^k

$T(k) = T(k-1) + T(k-3)$ ← 1.465^k