Proof Techniques

proposition (ประพจน์) - ประโยคที่ จริง หรือ เท็จ. P, Q iff.

$\neg P$, $P \wedge Q$, $P \vee Q$, $\boxed{P \Rightarrow Q}$, $P \Leftrightarrow Q \equiv P \Rightarrow Q$, $Q \Rightarrow P$.

predicate: $P(n)$

Quantifier $\exists, \forall$

$$\neg(\forall x. P(x)) \equiv \exists x. \neg P(x)$$
$$\neg \exists x P(x) \equiv \forall x. \neg P(x)$$
$$\neg \forall x \exists y P(x,y) \equiv \exists x \forall y \neg P(x,y)$$

Enumeration / Proof by cases

Claim: มี จน.อตรรกยะ x และ y ที่ x^y เป็น จน.ตรรกยะ

ให้ $x = \sqrt{2}$, $y = \sqrt{2}$

Case 1: x^y เป็น จน.ตรรกยะ ✓

Case 2: x^y ไม่ใช่ จน.ตรรกยะ (เป็น จน.อตรรกยะ) ให้ $z = \sqrt{2}^{\sqrt{2}}$

พิจารณา $z^x = (\sqrt{2}^{\sqrt{2}})^{\sqrt{2}} = \sqrt{2}^2 = 2$

ดังนั้นมี จน. อตรรกยะ สอง จน. ที่มีคุณสมบัติ ตามต้องการ. ∎

$P \Rightarrow Q$ direct proof

$\boxed{\text{สมมติว่า } P \text{ จริง}}$ แล้วแสดงว่า Q จริง

$P \Rightarrow Q$

$Q \Rightarrow P$??

ex: สำหรับ จน.เต็ม x ใดๆ ถ้า x เป็น จน.คู่ แล้ว x^2 เป็น จน.คู่ด้วย.

Proof: Assume ว่า x เป็น จน.คู่ นั่นคือ มี จน.เต็ม k ที่ $x=2k$

พิจารณา $x^2 = (2k)^2 = 2 \cdot 2k^2$

เนื่องจาก k เป็น จน.เต็ม, $2k^2$ เป็น จน.เต็ม

ดังนั้น x^2 เขียนอยู่ในรูป 2 คูณกับ จน.เต็มได้ x^2 เป็น จน.คู่.

▷ ถ้า จน. x ใดๆ เป็น จน.เต็มคี่ x^2 เป็น จน.เต็มคี่

$$P \Rightarrow Q \equiv \neg Q \Rightarrow \neg P$$

ex: ▷ สำหรับ จน.เต็ม x ใดๆ ถ้า x^2 เป็น จน.เต็มคู่ แล้ว x เป็น จน.เต็มคู่ด้วย.

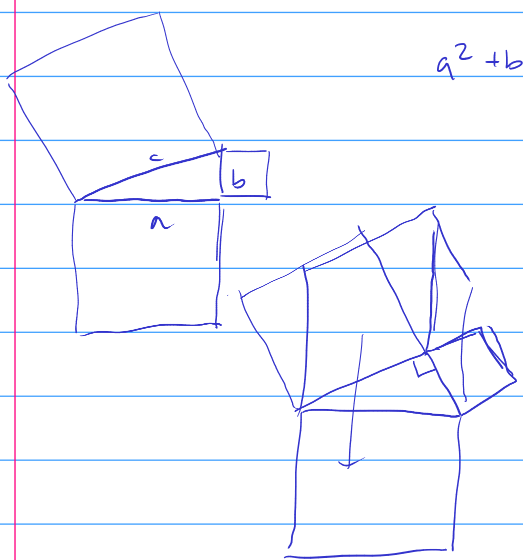
|||

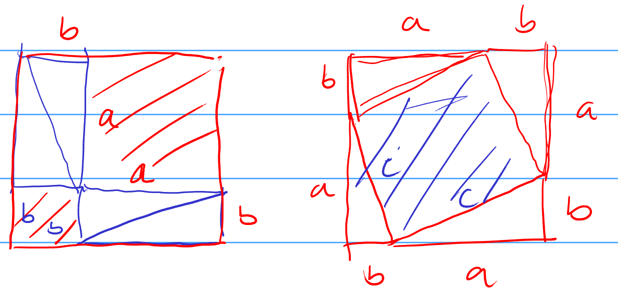
▷ สำหรับ จน.เต็ม x ใดๆ, ถ้า x ไม่เป็น จน.เต็มคู่ แล้ว x^2 ไม่เป็น จน.คู่.

"Proof by contraposition"

Proofs without words.

$$a^2 + b^2 = c^2$$





$$\boxed{c^2 = a^2 + b^2}$$

Proof by contradiction P ⋯> สมมติ $\neg P$

⋮

ได้ contradiction

Claim: จน.เฉพาะมีไม่จำกัด

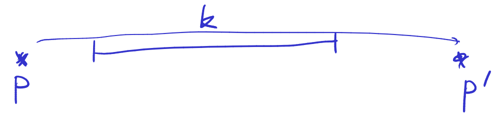
Proof: สมมติว่า จน.เฉพาะมีจำกัด คือ $p_1, p_2, \ldots, p_n$

พิจารณา $p_1 \cdot p_2 \cdots p_n + 1 = Z$

Case 1: Z เป็น จน.เฉพาะ → ได้ contradiction เพราะ Z ไม่อยู่ในรายการ

Case 2: Z ไม่เป็น จน.เฉพาะ ย่อมต้องมี จน.เฉพาะ p' ซึ่งหาร Z ลงตัว แต่ p' จะไม่อยู่ในรายการ เพราะทุก p_i, $Z \bmod p_i = 1$

→ ได้ contradiction เพราะ มี จน.เฉพาะที่ไม่อยู่ในรายการ



Claim: สำหรับจน.เต็ม k ใดๆ จะมี ช่วง $\underbrace{x, x+1, x+2, \dots, x+k}$ ที่ $x, x+1, \dots, x+k$ ไม่เป็น จน. เฉพาะเลย.

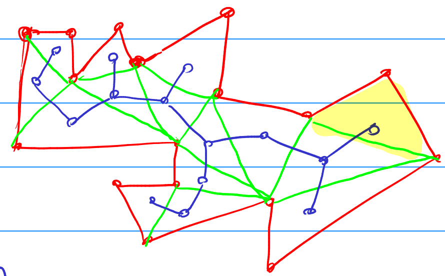
$Z = 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 \times \cdots \times M$ สังเกต ทุกๆ $2 \le i \le M$

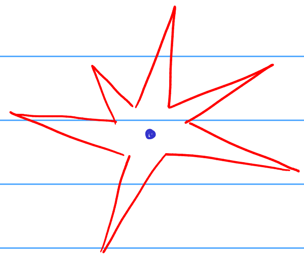
$Z+2$

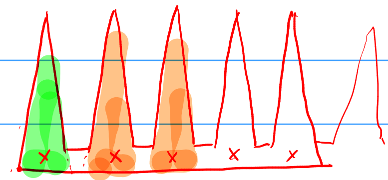
$Z+3$ $\quad Z+i \bmod i = 0$

$Z+4$ $\quad Z+2, Z+3, \dots, Z+M$

ให้ $x = Z+2$ ถ้า $M = k+2$.







มี n จุดยอด ใช้ $\lfloor n/3 \rfloor$

n

แบ่งสามเหลี่ยม ได้ (n − 2 รูป)