

→ Stable Marriage

Men m_1, m_2, \dots, m_n — w_j \leftarrow

Women w_1, w_2, \dots, w_n — w_j \leftarrow

bbid: nu q: y preference sirov pasmasi — w_j \leftarrow

$m_1: w_1 w_2 w_3$

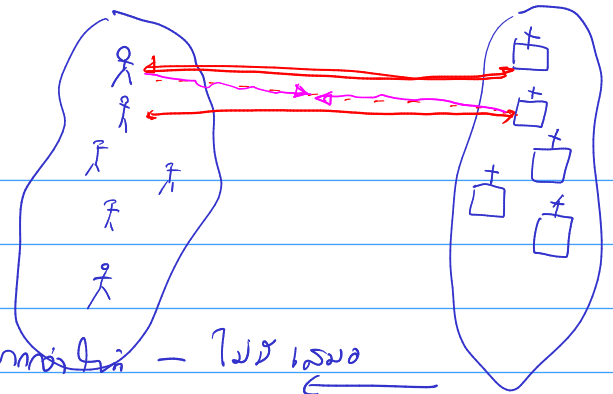
$m_2: w_2 w_3 w_1$

$m_3: w_2 w_3 w_1$

$w_1: m_3 m_1 m_2$

$w_2: m_1 m_2 m_3$

$w_3: m_2 m_1 m_3$



Definition

bu $A = \{m_1, \dots, m_n\}$, $B = \{w_1, \dots, w_n\}$

ben $M \subseteq A \times B$ iivlu **matching** d'ro iivlu ay'ro outon d'sing k'oj'oinu

amoni, 2 q'

o iivlu ay'meni outon d'sing k'oj'oinu

amoni, 2 q'

sirov match M iivlu **perfect matching** d'ro $|M| = n$

(ay'ro ay'meni d'ro k' M,

ay'meni v'ro m d'ro k' M)

ex:

$m_1 - w_1$

$m_2 - w_3$

$m_3 - w_2$

sirov matching (M) ay'meni

ben (m_i, w_j) iivlu **rogue pair** d'ro k' M

m_i ay'ro ay'meni w'

w_j ay'ro ay'meni m'

bbm' m_i bu w_j ay'meni w' k'ro pref list

bbm' w_j bu m_i ay'meni m' k'ro pref list

Perfect matching M iivlu **stable matching** d'ro k' M iivlu rogue pair.

Stable matching input! preference list v'ro $m_1, \dots, m_n,$

w_1, \dots, w_n

Output: stable matching (M)

Gale-Shapley



bu M ay'meni ay'meni ay'meni ay'meni

Observation 1: ถ้า algo ของเราเป็น $O(n^2)$, มันจะหา perfect matching ได้

\Rightarrow Algo ของเราเป็น $O(n^2)$ เป็น

Observation 2: ถ้าเราใช้ algo ที่เรา propose, มันจะหา perfect matching ได้ ^{หรือถ้ามันหาไม่ได้}

▷ Is our algo finding matching? ✓

▷ Is our algo finding perfect matching?

Claim 1: M เป็น perfect matching.

Proof: Prove by contradiction. สมมติว่า M ไม่ใช่ perfect matching.

\Rightarrow จะมีชายคนหนึ่งที่ไม่ได้แต่งงาน (m_i)

$\Rightarrow m_i$ จะไปหาผู้หญิงคนอื่น $\rightarrow m_i$ ไม่ได้อยู่ใน M

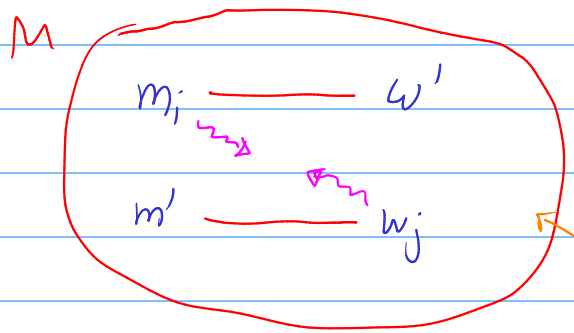
จาก observation 2, มันจะหา perfect matching ได้, มันจะหา perfect matching ได้, มันจะหา perfect matching ได้, มันจะหา perfect matching ได้ \rightarrow contradiction ❌

▷ M เป็น stable matching?

Claim 2: M เป็น stable matching

Proof: จาก Claim 1, M เป็น perfect matching. มันไม่มี rogue pair ใน M .

ถ้ามันมี contradiction สมมติว่า (m_i, w_j) เป็น rogue pair w.r.t. M .



- ถ้าสมมติว่า (m_i, w_j) เป็น rogue pair จาก M เราจะได้ w', m' ที่ $(m_i, w') \in M$ $(m', w_j) \in M$ ที่ m_i ชอบ w_j มากกว่า w'

ใน algorithm, มันจะหา m_i และ w_j และ w' และ m' และ m_i จะไปหา w_j และ w_j จะไปหา m_i

• ถ้า m_i ไม่ได้อยู่ใน w_j , มันจะหา w_j และ m'' ที่ชอบ m_i มากกว่า m'

• จาก observation 2, w_j จะหา w_j และ m'' ที่ชอบ m_i มากกว่า m' มันจะหา m_i \Rightarrow contradict assumption ว่า (m_i, w_j) เป็น rogue pair

Quality

အကယ်၍ m_i ချိန် w_i^* သည် best match ချိန်

GS algo
၁: m_i

w_i^* သည် m_i ၏ pref list ရှိပြီး $M \ni (m_i, w_i^*)$ ဖြစ်ပြီး M သည် stable matching ဖြစ်သည်။

၂: m_i
၃: w_i^*

Lemma: GS algorithm သည် အကယ်၍ m_i ၏ best match ချိန်

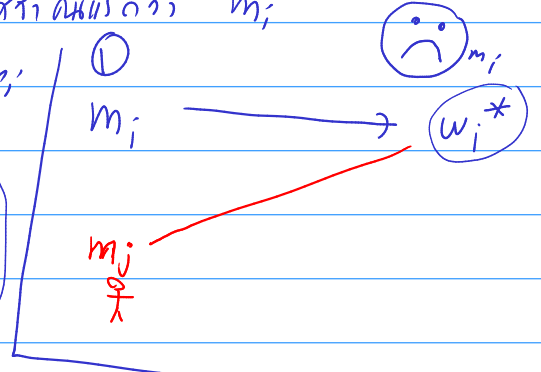
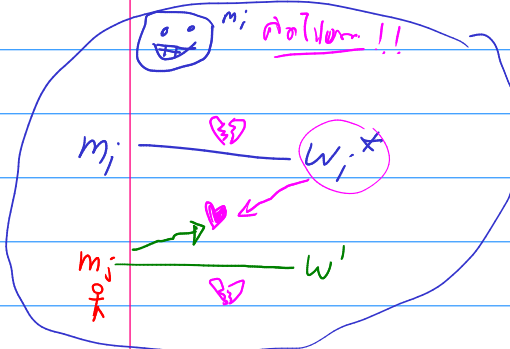
Proof: ချိန် w_i^* ဖြစ်ပြီး by contradiction

အကယ်၍ w_i^* မှာ best match မဟုတ်ပါက

multiverse ②

၁: m_i ချိန်

၂: w_i^* ချိန် best match ချိန်



• m_i ချိန် w_i^* ချိန် best match ချိန်

Pref list m_j : $w_i^* \rightarrow w_j^* \rightarrow w'$

Match best match

• w_i^* ချိန် best match ချိန် m_i ဖြစ်ပြီး stable matching M' ရှိပြီး $(m_i, w_i^*) \in M'$ ဖြစ်သည်။

• w' ချိန် m_j ချိန် best match ချိန် M' မှာ $w' \neq w_i^*$

• m_j ချိန် w' ချိန် best match ချိန် M' မှာ $w' \neq w_i^*$

• Claim: m_j ချိန် w_i^* ချိန် best match ချိန် M' မှာ

• Contradiction ဖြစ်သည်:

(m_j, w_i^*) ချိန် rogue pair ဖြစ်ပြီး M' မှာ

• m_j ချိန် w_i^* ချိန် best match ချိန် M' မှာ w_i^* ချိန် best match ချိန် M' မှာ

• w' ချိန် m_j ချိန် best match ချိန် M' မှာ w' ချိန် best match ချိန် M' မှာ

• $w_i^* \neq w'$ ဖြစ်ပြီး m_j ချိန် w_i^* ချိန် best match ချိန် M' မှာ

• $w_i^* \neq w'$ ဖြစ်ပြီး m_j ချိန် w_i^* ချိန် best match ချိန် M' မှာ